問題 1

〔解答〕

(1)

P の座標を $(p, 0)$ とおく。$AP^2 = BP^2$ が成り立つから,

$$(p-3)^2+(0-5)^2=(p+3)^2+1^2 \Leftrightarrow p=2$$

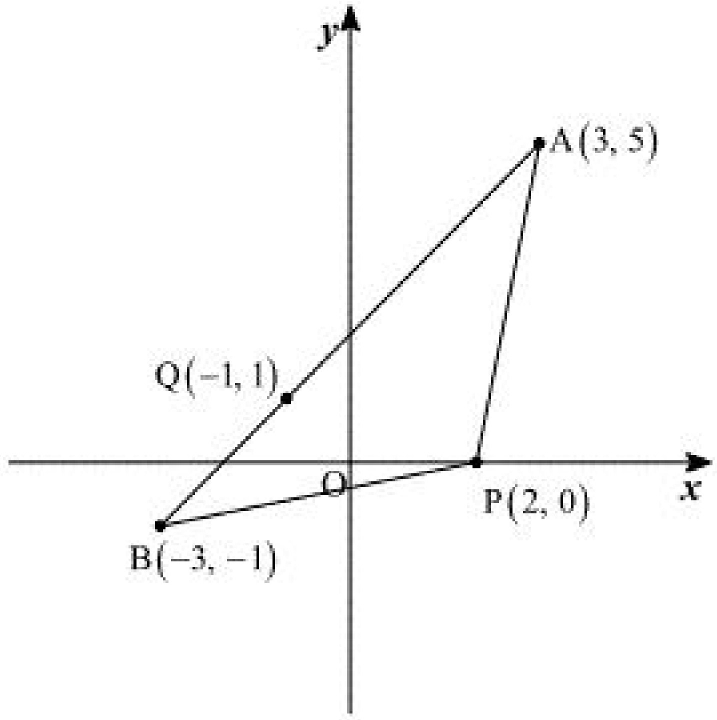
となる。よって，P の座標は $(2, 0)$ である。

(答) $(2, 0)$

(2)	$(-1, 1)$

(3)

図は以下のようになる。



$AQ > QB$ より，直線 l は辺 AP と交点をもつ。この交点を R とおく。条件より,

$$\frac{AQ \cdot AR}{AB \cdot AP}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow AR=\frac{3}{4}AP$$

となる。これより R は辺 AP を $3:1$ に内分する点であるから，R の座標は,

$$\left(\frac{3\cdot 2+1\cdot 3}{4}, \frac{3\cdot 0+1\cdot 5}{4}\right)=\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

となる。よって，直線 ℓ の式は,

$$y=\frac{1-\frac{5}{4}}{-1-\frac{9}{4}}(x+1)+1$$
$$=\frac{1}{13}x+\frac{14}{13}$$

となる。

(答) $y=\frac{1}{13}x+\frac{14}{13}$

〔解説〕

(2)

Q の座標は,

$$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot(-3)}{3}, \frac{1\cdot 5+2\cdot(-1)}{3}\right)=(-1, 1)$$

となる。

問題２

〔解答〕

	(ア)	(イ)
(1)	$\frac{4}{15}\pi$	$\frac{8}{3}\pi$

(2)

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき $-\frac{1}{5}\pi \leqq \frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi \leqq \frac{13}{10}\pi$ である。よって，

$$\cos\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi \leqq \frac{13}{10}\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{15}\pi < x \leqq 2\pi$$

となる。

(答) $\frac{14}{15}\pi < x \leqq 2\pi$

(3)

条件をみたすのは以下の２つの場合がある。

[1] $\cos\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi\right)<0$ かつ $\sin 2x>0$ のとき

(2)の結果より，$\cos\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi\right)<0$ となるのは，

$$\frac{14}{15}\pi < x \leqq 2\pi$$

のときである。$\sin 2x>0$ となるのは，

$$0<x<\frac{\pi}{2},\ \pi<x<\frac{3}{2}\pi$$

のときである。以上より，この場合に条件を満たす x の範囲は，

$$\pi<x<\frac{3}{2}\pi$$

である。

[2] $\cos\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi\right)>0$ かつ $\sin 2x<0$ のとき

$\cos\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi\right)>0$ となるのは，

$$\cos\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi\right)>0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{5} \leqq \frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq x<\frac{14}{15}\pi$$

のときである。$\sin 2x<0$ となるのは

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi,\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi$$

のときである。以上より，この場合に条件を満たす x の範囲は，

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{14}{15}\pi$$

である。

以上[1][2]より，求める範囲は，

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{14}{15}\pi,\ \pi<x<\frac{3}{2}\pi$$

である。

(答) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{14}{15}\pi,\ \pi<x<\frac{3}{2}\pi$

〔解説〕

(1)

$y=\cos\left\{\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{15}\pi\right)\right\}$ となるから，このグラフは $y=\cos\frac{3}{4}x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{4}{15}\pi$ だけ平行移動したものである。また，この関数の周期は $\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}\pi$ である。

問題３

〔解答〕

(1)	$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$

(2)

(1)の結果より，

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=a_{n+2}-a_{n+1}\\ &=\left(\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\right)-a_{n+1}\\ &=-\frac{1}{2}\left(a_{n+1}-a_n\right)\\ &=-\frac{1}{2}b_n \end{aligned}$$

が成り立つ。また，$b_1=a_2-a_1=1$である。よって，

$$\begin{aligned} b_n&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}b_1\\ &=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)

$n\geqq 2$のとき，階差数列の公式より，

$$\begin{aligned} a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\ &=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\ &=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

となる。これは$n=1$のときのときも成り立つ。

(答) $a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

(4)

(3)の結果より，

$$\begin{aligned} &a_n=\frac{171}{256}\\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{171}{256}\\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{512}\\ &\Leftrightarrow n=10 \end{aligned}$$

である。

(答) $n=10$

〔解説〕

(1)

条件より，

$$\begin{aligned} a_{n+2}&=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\\ &=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n \end{aligned}$$

となる。

問題４

(1)

まず，対数の底の条件より $0<x<1, 1<x$ であり，真数条件より $20-y>0$ である。また，左辺を変形すると，

$$\log_{\sqrt{x}} 2+1=\frac{\log_x 2}{\log_x \sqrt{x}}+1=2\log_x 2+1=\log_x 4x$$

となる。よって，

$$\log_{\sqrt{x}} 2+1<\log_x(20-y) \Leftrightarrow \log_x 4x<\log_x(20-y)$$

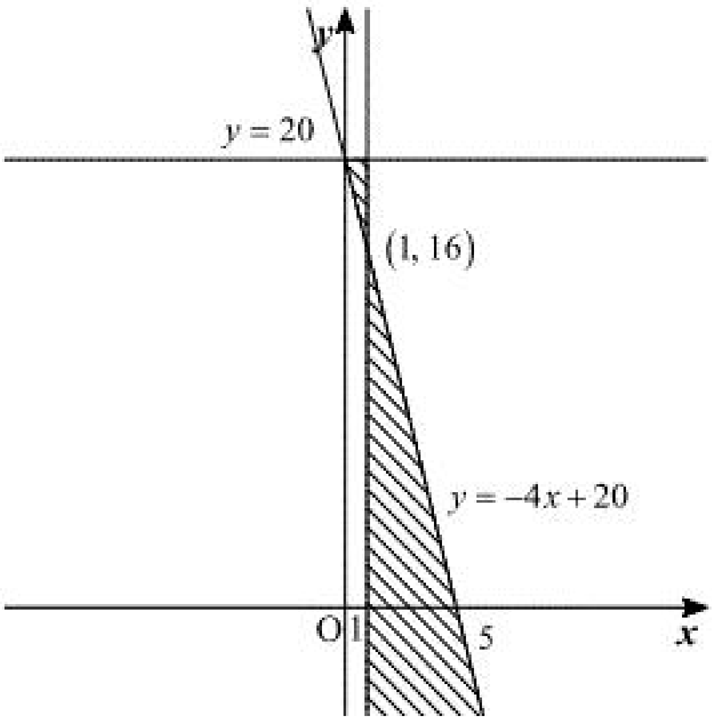
であるので，$0<x<1$ のとき，

$$4x>20-y \Leftrightarrow y>-4x+20$$

となり，$1<x$ のとき

$$4x<20-y \Leftrightarrow y<-4x+20$$

となる。また，$20-y>0 \Leftrightarrow y<20$ である。以上より，下の図の斜線部分が D である。ただし，境界線は含まない。



(答) 前図(境界を除く)

(2)

直線 $x=k$ (k は自然数)上において，(k, y) が D に含まれ，さらに y が自然数となるような点の個数を数える。(1)のグラフより $k=1$ または $5 \leqq k$ のときはそのような点は存在しない。よって $k=2, 3, 4$ の場合を考えればよい。

[1] $k=2$ のとき

条件を満たす点は，$(2, i)$ (ただし $i=1,2,\ldots,11$)であり，11 個存在する。

[2] $x=3$ のとき

条件を満たす点は，$(3, i)$ (ただし $i=1,2,\ldots,7$)であり，7 個存在する。

[3] $x=4$ のとき

条件を満たす点は，$(4, i)$ (ただし $i=1,2,3$)であり，3 個存在する。

以上[1][2][3]より，条件を満たす点の個数は，

$$11+7+3=21 \text{個}$$

である。

(答) 21 個

問題５

(1)

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OG}=(1-s)\overrightarrow{OE}+s\overrightarrow{OF}=\frac{1-s}{2}\vec{a}+\frac{1-s}{2}\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OG}=\frac{1-s}{2}\vec{a}+\frac{1-s}{2}\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OD}+r\overrightarrow{DG}\\&=(1-r)\overrightarrow{OD}+r\overrightarrow{OG}\\&=\frac{1-r}{2}\vec{a}+r\left(\frac{1-s}{2}\vec{a}+\frac{1-s}{2}\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}\right)\\&=\frac{1-rs}{2}\vec{a}+\frac{r(1-s)}{2}\vec{b}+\frac{rs}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OP}=\frac{1-rs}{2}\vec{a}+\frac{r(1-s)}{2}\vec{b}+\frac{rs}{3}\vec{c}$

(3)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ はすべて互いに一次独立である。点 P を直線 DG と平面 OBC の交点とすると，点 P は直線 BC 上にあるので，実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{b}+(1-k)\vec{c}$$

と表せる。これと(2)の結果を合わせると，

$$\frac{1-rs}{2}=0 \quad \cdots ①$$

$$\frac{r(1-s)}{2}+\frac{rs}{3}=1 \quad \cdots ②$$

が成り立つ。①より，

$$rs=1 \quad \cdots ③$$

であるから，②を整理すると，

$$\frac{r(1-s)}{2}+\frac{rs}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{r-1}{2}+\frac{1}{3}=1 \Leftrightarrow r=\frac{7}{3}$$

である。よって，この r の値を③に代入すると，

$$s=\frac{3}{7}$$

を得る。このとき，

$$\frac{r(1-s)}{2}=\frac{2}{3}>0,\ \frac{rs}{3}=\frac{1}{3}>0$$

であるから，確かに点 P は辺 BC 上の点である。

(答) $s=\frac{3}{7}$