

問題 1

〔解答〕

(1)	$(x+y+3)(2x+y-1)$	(2)	$\{9, 15, 18\}$	(3)	53	(4)	$\frac{5}{4}\pi$	(5)	$\sqrt{37}$
-----	-------------------	-----	-----------------	-----	----	-----	------------------	-----	-------------

〔解説〕

(1)

与えられた式を x について整理してから因数分解すると

$$\begin{aligned}2x^2 + 3xy + y^2 + 5x + 2y - 3 &= 2x^2 + (3y+5)x + (y^2 + 2y - 3) \\&= 2x^2 + (3y+5)x + (y+3)(y-1) \\&= \{x + (y+3)\} \{2x + (y-1)\} \\&= (x+y+3)(2x+y-1)\end{aligned}$$

となる。

(2)

題意より

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

であるから、 $A \cap \overline{B} = \{9, 15, 18\}$ である。

(3)

2進法を定義に基づいて10進法に直すと

$$\begin{aligned}110101_{(2)} &= 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 \\&= 53\end{aligned}$$

となる。

(4)

半径 r 、中心角 θ の扇形の弧の長さは $r\theta$ で与えられる。したがって、求める弧の長さは

$$3 \cdot \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{4}\pi$$

となる。

(5)

$$\begin{aligned}|2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\&= 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 9 \\&= 37\end{aligned}$$

であり、 $|2\vec{a} + \vec{b}| > 0$ より、 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$ と求まる。

問題 2

〔解答〕

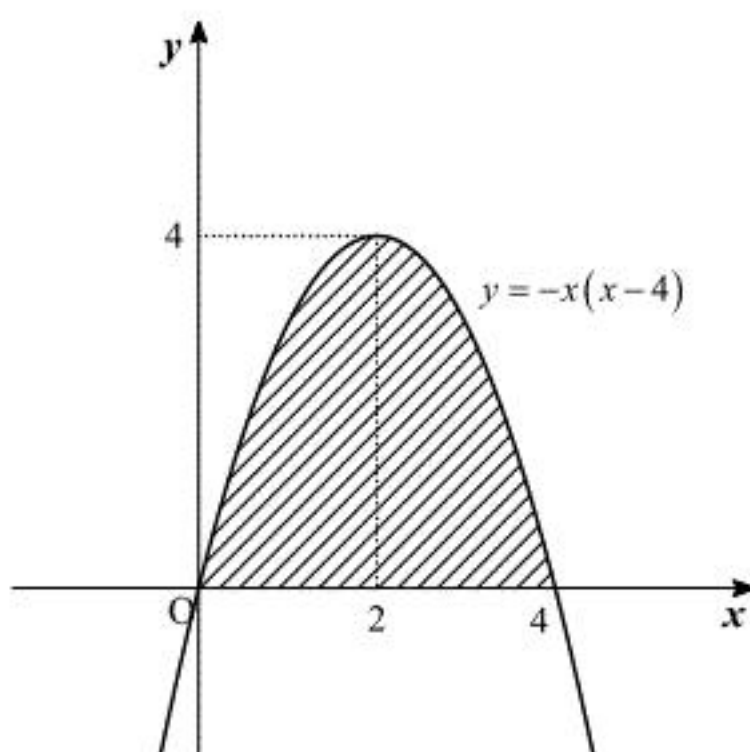
(1) $y = -x^2 + 4x$

(2)

放物線 C と x 軸の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow -x(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 4 \end{aligned}$$

と求まる。したがって、求める面積は下図の斜線部の面積に等しい。



上図より求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^4 \{-x(x-4)\} dx &= \frac{1}{6}(4-0)^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{32}{3}$

(3)

点 P , 点 H の座標を x のみを用いて表すと $P(x, -x^2 + 4x)$, $H(x, 0)$ であり, $1 \leq x \leq 3$ より点 P

は $y > 0$ の領域に存在する。したがって, $\triangle POH$ の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OH \cdot PH \\ &= \frac{1}{2} x \cdot (-x^2 + 4x) \\ &= -\frac{1}{2} x^3 + 2x^2 \end{aligned}$$

である。 S を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= -\frac{3}{2} x^2 + 4x \\ &= -\frac{3}{2} x \left(x - \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

となるから, $1 \leq x \leq 3$ における S の増減表は以下の通りとなる。

x	1	...	$\frac{8}{3}$	...	3
$\frac{dS}{dx}$		+	0	-	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

上の表より, S は $x = \frac{8}{3}$ のとき最大となる。

(答) $x = \frac{8}{3}$

〔解説〕

(1)

放物線 C の軸は直線 $x = 2$ であるから, 放物線 C の方程式は

$$y = k(x-2)^2 + l \quad (k, l \text{ は実数, ただし } k \neq 0)$$

とおける。放物線 C が点 $(0, 0)$, $(5, -5)$ を通ることから,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 = k(0-2)^2 + l \\ -5 = k(5-2)^2 + l \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4k + l = 0 \\ 9k + l = -5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ l = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

である。これは $k \neq 0$ を満たす。したがって放物線 C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -(x-2)^2 + 4 \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

と求まる。

問題 3

〔解答〕

(1) $t^2 - 2at + b = 0$

(2)

t は x について単調増加であり、 $t > 0$ で t と x は 1 対 1 で対応する。 $x < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1$ であることに着目すると、 a, b が満たすべき条件は

2 次方程式 $t^2 - 2at + b = 0$ が $0 < t < 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつ

ことである。 $f(t) = t^2 - 2at + b$ において、 $f(t) = 0$ の判別式を D とすると、放物線 $y = f(t)$ は下に凸であり、軸が直線 $t = a$ であることから、満たすべき条件は

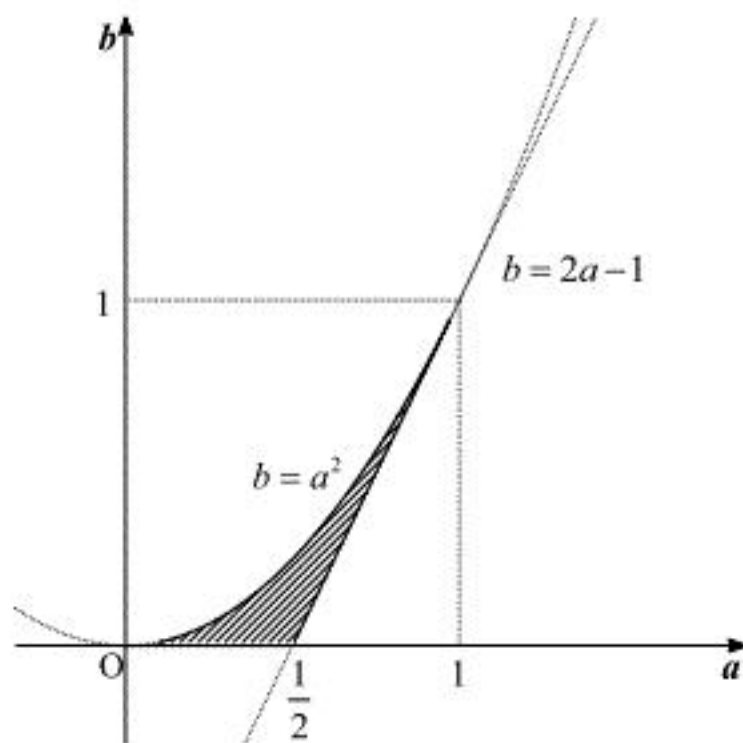
$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ \frac{D}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ 1 - 2a + b > 0 \\ 0 < a < 1 \\ a^2 - b > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 0 \\ b > 2a - 1 \\ b < a^2 \end{cases}$$

である。領域の境界となる直線 $b = 2a - 1$ と曲線 $b = a^2$ の共有点の座標は、2 式を連立して、

$$\begin{aligned} 2a - 1 &= a^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

より、 $(1, 1)$ と求まる。よって、求める領域は下図の斜線部である。ただし、境界線を除く。



(答) 前図斜線部 (ただし境界線を除く)

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} 4^x &= (2^2)^x = (2^x)^2 \\ 2^{x+1} &= 2^x \cdot 2 \end{aligned}$$

であることを利用して変形すると、

$$\begin{aligned} 4^x + a \cdot 2^{x+1} + b &= (2^x)^2 + 2a \cdot 2^x + b \\ &= t^2 + 2at + b \end{aligned}$$

と書き換えられる。

問題 4

〔解答〕

(1) 第56項

(2)

$k \geq 2$ の場合を考える。 k が初めて現れるまでに、 i ($i=1, 2, \dots, k-1$) はこの数列内に各 i 回ずつ登場している。よって k が初めて現れるのは

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{k-1} i &= 1 + \frac{1}{2}(k-1)\{1+(k-1)\} \\ &= 1 + \frac{1}{2}k(k-1) \\ &= \frac{k^2 - k + 2}{2} \end{aligned}$$

より第 $\frac{k^2 - k + 2}{2}$ 項である。これは $k=1$ の場合も成立する。

(答) 第 $\frac{k^2 - k + 2}{2}$ 項

(3)

以下、与えられた数列の第 n 項を a_n 、分母が k である数列上の範囲を第 k 群と呼ぶ。数列の各項の分母のみに注目すると、これは(1)の数列と一致する。また、第 k 群の各項の分子は正の奇数が小さい順に k 個並べられている。したがって a_n の値が $\frac{9}{11}$ と一致するのは、 n が小さい順に

$$a_n = \frac{9}{11}, \frac{27}{33}, \frac{45}{55}, \dots$$

の場合が考えられる。 n が最小となるのは $a_n = \frac{9}{11} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{11}$ となるときである。これは第11群の中の5番目の数であるから、このときの n は、

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=1}^{10} k + 5 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 5 \\ &= 60 \end{aligned}$$

と求まる。また、2番目に n が小さくなるのは $a_n = \frac{27}{33} = \frac{14 \cdot 2 - 1}{33}$ となるときである。これは第33群の中の14番目の数であるから、このときの n は、

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=1}^{32} k + 14 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 33 + 14 \\ &= 542 \end{aligned}$$

と求まる。以上より、求める値は $n=60, 542$ である。

(答) $n=60, 542$

(4)

(3)の数列において、第 k 群に登場する項の和は

$$\sum_{i=1}^k \frac{2i-1}{k} = \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{k} + \frac{2k-1}{k} \right) = k$$

である。 $\frac{5}{9}$ が初めて現れるのは第9群の3番目であるから、求める総和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 k + \frac{1+3+5}{9} &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (1+8) + 1 \\ &= 37 \end{aligned}$$

である。

(答) 37

〔解説〕

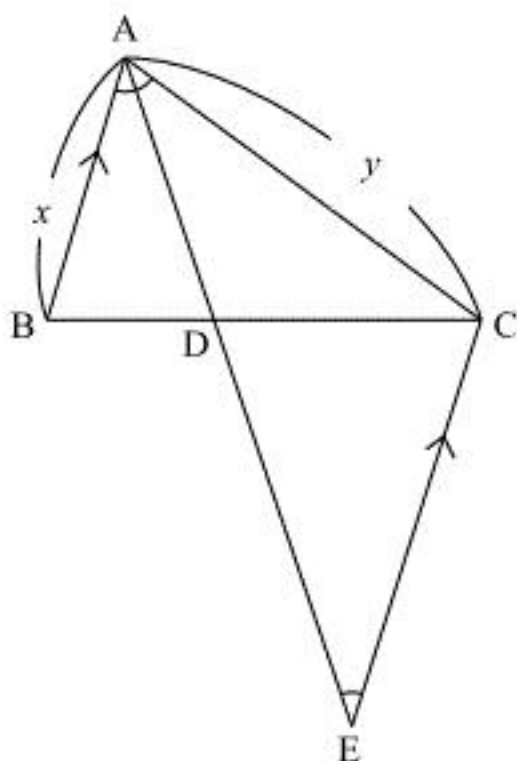
(1)

11が初めて現れるとき、 i ($i=1, 2, \dots, 10$) はこの数列内に各 i 回ずつ登場している。よって11が初めて現れるのは

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{10} i &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1+10) \\ &= 56 \end{aligned}$$

より第56項である。

問題 5



上図のように点Cを通り辺ABに平行な直線と直線ADの交点をEと置く。このとき $AB \parallel CE$ より $\angle EAC = \angle EAB = \angle AEC$ であるから、 $\triangle ACE$ は $CE = CA = y$ の二等辺三角形である。さらに、 $AB \parallel CE$ より、

$$\angle DAB = \angle DEC, \angle DBA = \angle DCE$$

が成り立つから、 $\triangle ABD$ と $\triangle ECD$ は相似である。以上より、

$$BD : CD = AB : EC = x : y$$

である。よって、題意は示された。

(証明終)