

問題 1

(1)

求める単位ベクトルを $\vec{b} = (x, y)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 3x\end{aligned}$$

が成り立つ。いま, $\vec{b}$ は単位ベクトルであるから, その大きさを考えると,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (3x)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{10x^2} &= 1 \\ \therefore x &= \pm \frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

が得られる。 $y = 3x$ より, $y = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$ であるので,

$$\vec{b} = \left(\pm \frac{\sqrt{10}}{10}, \pm \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \text{ (複号同順)}$$

である。

$$\text{(答)} \left(\pm \frac{\sqrt{10}}{10}, \pm \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \text{ (複号同順)}$$

(2)

指数法則と対数の定義に基づいて計算すると,

$$\begin{aligned}9^{\log_3 5} &= (3^2)^{\log_3 5} \\ &= 3^{2 \cdot \log_3 5} \\ &= (3^{\log_3 5})^2 \\ &= 5^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

と求められる。

$$\text{(答)} 25$$

(3)

与式は,

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{6n}{7}} = 5 \sqrt{\frac{3n}{2^3 \cdot 7}}$$

と変形できる。 $2, 3, 7$ は互いに素であるから, 与式が自然数になるためには自然数 k を用いて, $n = 2^3 \cdot 7k$ と表されることが必要である。このとき,

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{6n}{7}} = 5\sqrt{3k}$$

となり, 与式が自然数となる最小の自然数 k の値は $k = 3$ である。よって, $\frac{5}{4} \sqrt{\frac{6n}{7}}$ が自然数となる最小の自然数 n の値は,

$$n = 2^3 \cdot 7 \cdot 3 = 168$$

である。

$$\text{(答)} n = 168$$

(4)

$x = -2i$ が方程式の解の1つであるから,

$$\begin{aligned}(-2i)^3 + a(-2i)^2 + b(-2i) + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (12 - 4a) - (2b - 8)i &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。 $12 - 4a, 2b - 8$ が実数であるから複素数の相等より,

$$\begin{cases} 12 - 4a = 0 \\ 2b - 8 = 0 \end{cases} \\ \therefore a = 3, b = 4$$

となる。これらを方程式に代入し因数分解すると, 方程式の解は,

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 + 4x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x + 3) &= 0 \\ \therefore x &= \pm 2i, -3\end{aligned}$$

であるので, 他の解は,

$$x = 2i, -3$$

となる。

$$\text{(答)} a = 3, b = 4 \text{ 他の解: } x = 2i, -3$$

問題 2

(1)

直線 BC の方程式は,

$$y = \frac{-5-1}{4-(-4)}\{x-(-4)\}+1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x-2$$

$$\Leftrightarrow 3x+4y+8=0$$

である。これより、点 A(0, 4) と直線 BC との距離 h は、点と直線の距離の公式より,

$$h = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5}$$

と求められる。また、線分 BC の長さは,

$$BC = \sqrt{\{4-(-4)\}^2 + (-5-1)^2} = 10$$

であるから、 $\triangle ABC$ の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{24}{5}$$

$$= 24$$

である。

$$(\text{答}) \quad h = \frac{24}{5}, S = 24$$

(2)

線分 AB の長さは,

$$AB = \sqrt{\{0-(-4)\}^2 + (4-1)^2} = 5$$

である。(1)の結果を用いると,

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \cdot \sin B$$

$$\therefore \sin B = \frac{24}{25}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \sin B = \frac{24}{25}$$

(3)

点 P の座標を実数 X, Y を用いて $P(X, Y)$ とおく。このとき,

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 86$$

$$\Leftrightarrow (X-0)^2 + (Y-4)^2 + \{X-(-4)\}^2 + (Y-1)^2 + (X-4)^2 + \{Y-(-5)\}^2 = 86$$

$$\Leftrightarrow 3X^2 + 3Y^2 + 74 = 86$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 4$$

が成り立つ。したがって、点 P の軌跡は、原点 (0, 0) を中心とする半径 2 の円である。

$$(\text{答}) \quad \text{原点}(0, 0) \text{ を中心とする半径 } 2 \text{ の円}$$

問題 3

(1)

東に1回動くことを→と表し、北に1回動くことを↑と表す。スタート地点からゴール地点まで最短距離で向かうとき、東に5回動き、北に4回動くので、求める道順の総数は5つの→と4つの↑の並べ方の総数に等しい。したがって、求める道順の総数は、

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 126 通り

(2)

スタート地点から地点Aまで最短距離で向かう道順の総数は、2つの→と4つの↑の並べ方の総数に等しいので、

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (通り)}$$

である。地点Aからゴール地点まで最短距離で向かう道順は→→→の1通りであるので、求める道順の総数は

$$15 \cdot 1 = 15 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 15 通り

(3)

地点Bまでの道順は、2つの→と3つの↑の並べ方の総数に等しいので、

$${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ (通り)}$$

である。それぞれの道順について、その道順を通る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ であり、地点Bからゴールまでの道順は任意であるので、地点Bを通る確率は、

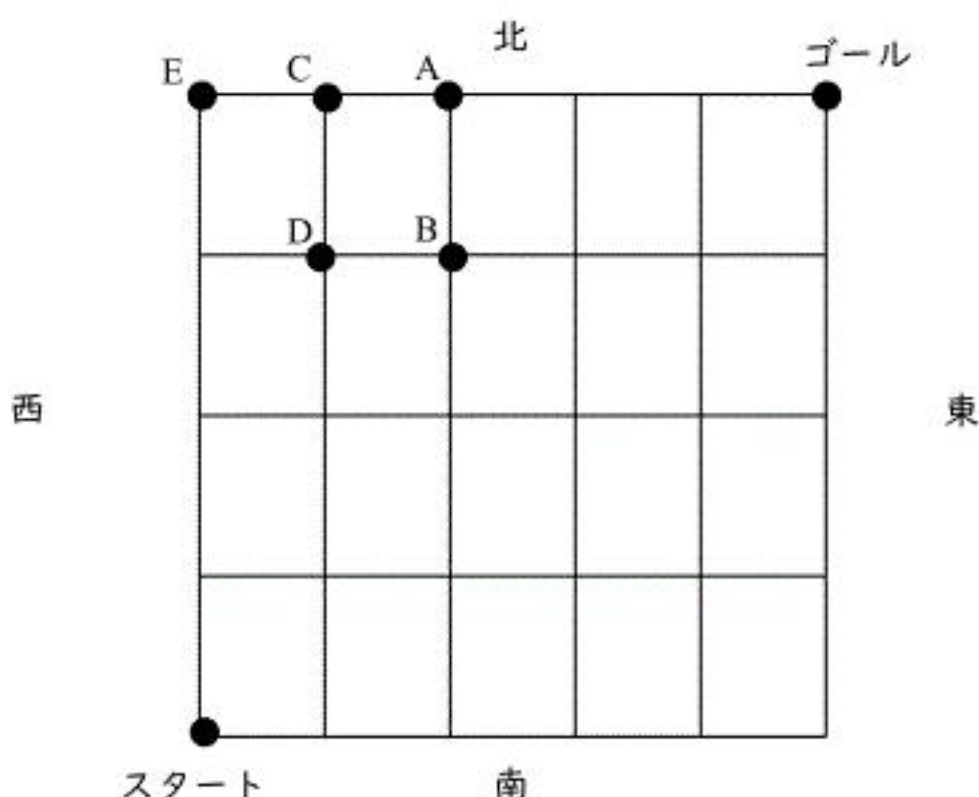
$$10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1^4 = \frac{5}{16}$$

である。

(答) $\frac{5}{16}$

(4)

地点C、地点D、地点Eを下図のように定める。



このとき、地点Aからゴールまでは確率1で動き、地点C、地点Eを通れば必ず地点Aを通ることに注意すると、地点Aを通る事象は、

- [1] 地点Bを通り、かつ地点Aを通る事象
- [2] 地点Dを通り、かつ地点Cを通る事象
- [3] 地点Eを通る事象

という3つ互いに排反な事象に分けられる。地点Aを通る確率は、それぞれの事象が起こる確率の和である。以下、それぞれの確率について場合分けをして求める。

[1] 地点Bを通り、かつ地点Aを通るとき

(3)より、地点Bにたどり着く確率は $\frac{5}{16}$ である。よって、地点Bを通り、かつ地点Aを通

る確率は、

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

である。

[2] 地点Dを通り、かつ地点Cを通るとき

(3)と同様にすると、地点Dにたどり着く確率は ${}_4C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ である。よって、地点Dを

通り、かつ地点Cを通る確率は、

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

[3] 地点Eを通るとき

(3)と同様にすると、地点Eにたどり着く確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ である。

以上、[1], [2], [3]より、地点Aを通る確率は、

$$\frac{5}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{11}{32}$$

である。

(答) $\frac{11}{32}$

(5)

地点Aと地点Bのうち、少なくとも一方を通る確率は、

$$(\text{地点Aを通る確率}) + (\text{地点Bを通る確率}) - (\text{地点Bを通りかつ地点Aを通る確率})$$

であるので、(3), (4)より、

$$\frac{11}{32} + \frac{5}{16} - \frac{5}{32} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

問題 4

(1)

和積公式を用いると、

$$\cos x - \cos a = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} = 0$$

と変形できる。 $\sin \frac{x+a}{2} = 0$ のとき、整数 s を用いると、

$$\frac{x+a}{2} = s\pi \Leftrightarrow x = 2s\pi - a$$

となる。一方、 $\sin \frac{x-a}{2} = 0$ のとき、整数 t を用いると、

$$\frac{x-a}{2} = t\pi \Leftrightarrow x = 2t\pi + a$$

となる。以上より、整数 n を用いてまとめると、 $\cos x - \cos a = 0$ の解は、

$$x = 2n\pi \pm a$$

となる。

(答) $x = 2n\pi \pm a$ (n は整数)

(2)

和積公式を用いると、 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ である。ここで、 $\alpha \geq 0$ 、 $\beta \geq 0$ 、

$\alpha + \beta \leq \pi$ であることより、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ 、 $0 \leq \beta \leq \pi$ とわかる。このとき、

$$0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、

$$-\pi \leq \alpha - \beta \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①、②より、

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha + \cos \beta \geq 0$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

問題 5

(1)

$f(x)=2x^3+3(1-a)x^2-6ax-b$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2+6(1-a)x-6a \\ &= 6\{x^2+(1-a)x-a\} \\ &= 6(x+1)(x-a) \end{aligned}$$

であるので、 $x=-1, a$ で $f'(x)=0$ となる。したがって、 $a>0$ より増減表は以下の通りである。

x	...	-1	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

増減表より、 $x=-1$ で極大値をとり、その値は、

$$f(-1)=3a-b+1$$

である。また、 $x=a$ で極小値をとり、その値は、

$$f(a)=-a^3-3a^2-b$$

をとる。

$$\begin{array}{ll} \text{(答)} & \text{極大値：} \quad x=-1 \text{ のとき } 3a-b+1 \\ & \text{極小値：} \quad x=a \text{ のとき } -a^3-3a^2-b \end{array}$$

(2)

a の値で場合分けを行う。

[1] $0<a<1$ のとき

$0\leq x\leq 1$ において、増減表は以下の通りである。

x	0	...	a	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	極小	↗	

増減表より、 $f(x)$ が最小値をとるのは $x=a$ のときであり、

$$f(a)=-a^3-3a^2-b$$

であるので、最小値は $-a^3-3a^2-b$ である。

[2] $1\leq a$ のとき

$0\leq x\leq 1$ において、増減表は以下の通りである。

x	0	...	1
$f'(x)$		-	
$f(x)$		↘	

増減表より、 $f(x)$ が最小値をとるのは $x=1$ のときであり、

$$\begin{aligned} f(1) &= 2+3(1-a)-6a-b \\ &= -9a-b+5 \end{aligned}$$

であるので、最小値は $-9a-b+5$ である。

以上、[1], [2] より、 $0\leq x\leq 1$ における $f(x)$ の最小値は、

$$\begin{array}{ll} 0<a<1 \text{ のとき} & f(a)=-a^3-3a^2-b \\ 1\leq a \text{ のとき} & f(1)=-9a-b+5 \end{array}$$

である。

$$\begin{array}{ll} \text{(答)} & 0<a<1 \text{ のとき} \quad f(a)=-a^3-3a^2-b \\ & 1\leq a \text{ のとき} \quad f(1)=-9a-b+5 \end{array}$$

(3)

$0\leq x\leq 1$ における $f(x)$ の最小値が正であればよい。ここで、(2)の結果に基づいて a の値で場合分けする。

[1] $0<a<1$ のとき

このとき、最小値は $f(a)$ であるから、点 (a, b) の満たすべき条件は、

$$\begin{aligned} f(a) &> 0 \\ \Leftrightarrow -a^3-3a^2-b &> 0 \\ \Leftrightarrow b &< -a^3-3a^2 \end{aligned}$$

となる。

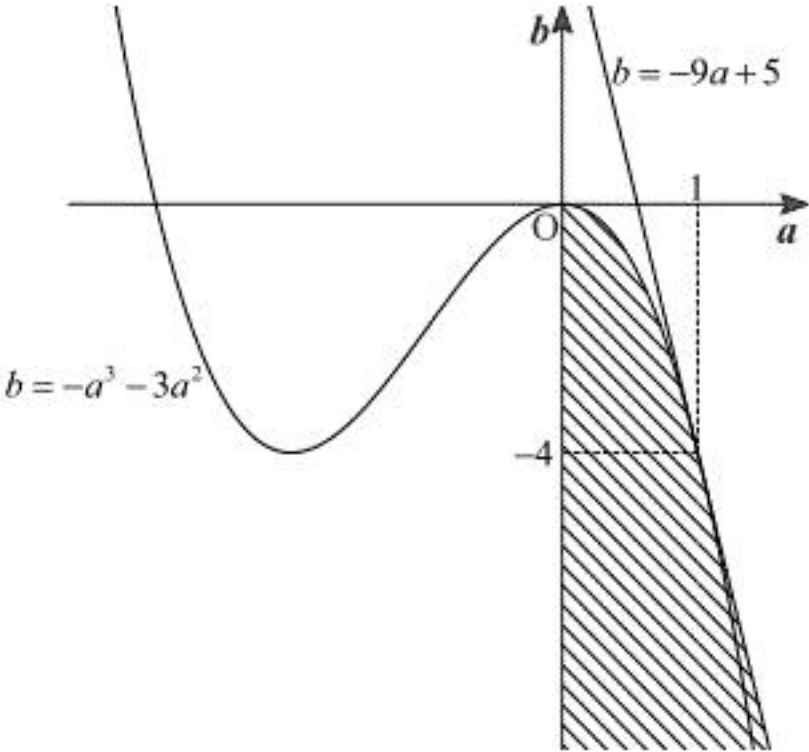
[2] $1\leq a$ のとき

このとき、最小値は $f(1)$ であるから、点 (a, b) の満たすべき条件は、

$$\begin{aligned} f(1) &> 0 \\ \Leftrightarrow -9a-b+5 &> 0 \\ \Leftrightarrow b &< -9a+5 \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2] より、条件を満たす点 (a, b) の存在する領域は下図の斜線部となる。ただし、境界線は含まない。また、直線 $b=-9a+5$ は、曲線 $b=-a^3-3a^2$ の点 $(1, -4)$ における接線である。



$$\text{(答)} \quad \begin{cases} b < -a^3-3a^2 \\ b < -9a+5 \end{cases}, \text{ 前図}$$