

【1】

【解答】

ア	$\frac{1}{4}$	イ	$\frac{1}{2}$	ウ	$-\frac{7}{16}$
エ	$\sqrt{2}$	オ	$\sqrt{2}$	カ	90
キ	26	ク	1260	ケ	1225
コ	4	サ	17		

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x^2 - 18ax + 12a^2 \\ &= 6(x-a)(x-2a)\end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ より $a < 2a$ なので増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

また、

$$\begin{aligned}f(2a) &= 16a^3 - 36a^3 + 24a^3 - \frac{1}{2} \\ &= 4a^3 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。ここで a の値により場合分けする。

[1] $1 \geq 2a$ すなわち $a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$x > 1$ の範囲内で単調増加であるため、 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲でつねに正の値をとることは $f(1) \geq 0$ となることと同値である。

$$\begin{aligned}f(1) &= 2 - 9a + 12a^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}(8a^2 - 6a + 1) \\ &= \frac{3}{2}(2a-1)(4a-1)\end{aligned}$$

なので

$$f(1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}, \quad a \geq \frac{1}{2}$$

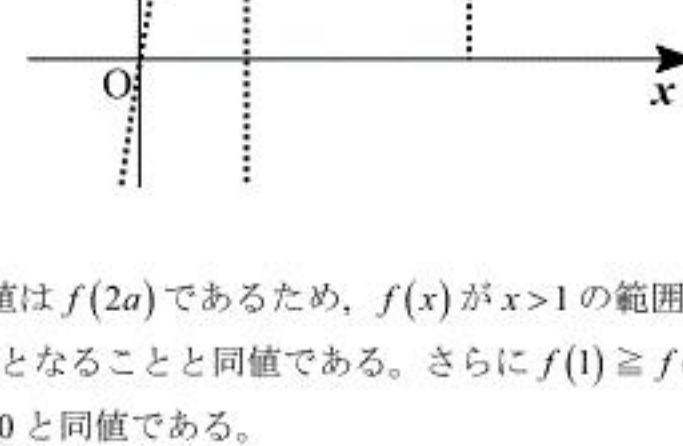
であり、これと $a \leq \frac{1}{2}$ より $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 、 $a = \frac{1}{2}$ のとき条件を満たす。

[2] $1 < 2a$ すなわち $a > \frac{1}{2}$ のとき

$x > 1$ の範囲内に $x = 2a$ を含むため、 $f(1)$ と $f(2a)$ の大小関係で分けて考える。

[i] $f(1) \geq f(2a)$ のとき

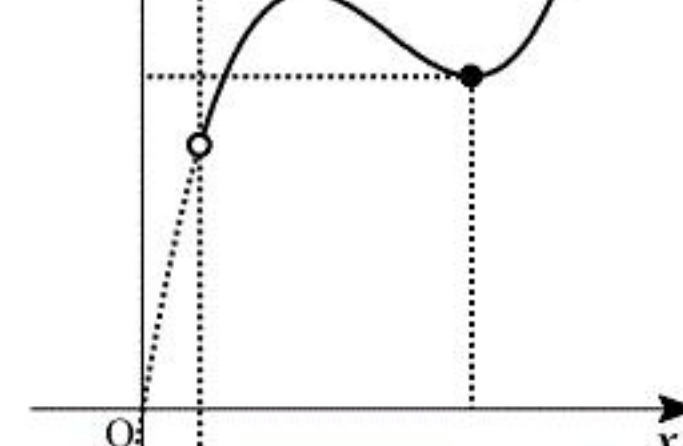
次の図のようになる。



従って最小値は $f(2a)$ であるため、 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲でつねに正の値をとることは $f(2a) > 0$ となることと同値である。さらに $f(1) \geq f(2a)$ より、これは $f(2a) > 0$ かつ $f(1) \geq 0$ と同値である。

[ii] $f(1) < f(2a)$ のとき

次の図のようになる。



従って、 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲でつねに正の値をとることは $f(1) \geq 0$ と同値である。

さらに $f(1) < f(2a)$ より、これは $f(2a) > 0$ かつ $f(1) \geq 0$ と同値である。

以上[i], [ii]より、いずれの場合も求める条件は $f(2a) > 0$ かつ $f(1) \geq 0$ と同値である。

$$\begin{aligned}f(2a) &> 0 \\ \Leftrightarrow 4a^3 - \frac{1}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> \frac{1}{2}\end{aligned}$$

および

$$f(1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}, \quad a \geq \frac{1}{2}$$

より $a > \frac{1}{2}$ のとき $f(x)$ が $x > 1$ の範囲でつねに正の値をとる。

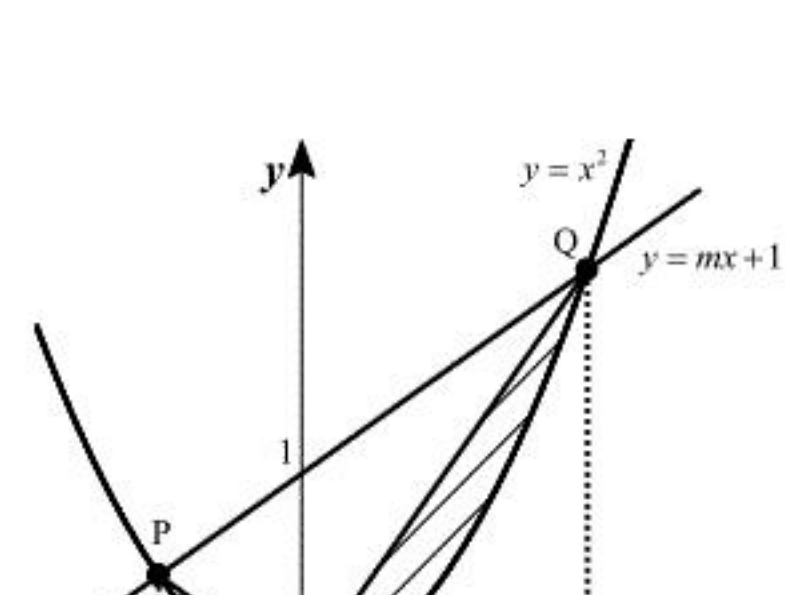
以上[1], [2]より、求める範囲は $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 、 $a = \frac{1}{2}$ 、 $a > \frac{1}{2}$ 、すなわち $0 < a \leq \frac{1}{4}$ または $\frac{1}{2} \leq a$ である。

ある。 $a = \frac{1}{4}$ のとき、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}f(2a) &= 4a^3 - \frac{1}{2} \\ &= 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{7}{16}\end{aligned}$$

より極小値 $-\frac{7}{16}$ をとる。

(2)



放物線 $y = x^2$ と直線 $y = mx + 1$ を連立させると $x^2 = mx + 1$ であり、この式の解を p, q ($p < 0 < q$) とすると、 p, q はそれぞれ点 P, Q の x 座標に等しい。また、解と係数の関係より

$$p + q = m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$pq = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{6}(0-p)^3 \\ &= -\frac{1}{6}p^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{6}(q-0)^3 \\ &= \frac{1}{6}q^3\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}S_1 : S_2 &= 1 : 8 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{6}p^3 : \frac{1}{6}q^3 &= 1 : 8 \\ \Leftrightarrow -8p^3 &= q^3\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow q = -2p \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。これを②に代入し、

$$\begin{aligned}-2p^2 &= -1 \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because p < 0)\end{aligned}$$

となり、これを③に代入し、

$$q = -2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}$$

となる。これらを①に代入し、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = m$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。また、

$$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (\sqrt{2}, 2)$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (\sqrt{2})^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、 $\overrightarrow{OP} \neq 0$ かつ $\overrightarrow{OQ} \neq 0$ なので $\angle POQ = 90^\circ$ である。

(3)

1, 2, 3 をいずれも何度使ってもいい場合、3桁の異なる整数は

$$3^3 = 27$$

より 27 個できる。1 と 2 は 3 個以上、3 は 2 個あるため、この 27 個のうち作れないのは 333 のみである。よって

$$27 - 1 = 26$$

より 3桁の異なる整数は 26 個できる。

8桁の数字を作ると数字が1つ余るため、どの数字が余るかで場合分けする。

[1] 1 が余る場合

1 が 3 個、2 が 3 個、3 が 2 個を用いるので、

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

より 560 個の整数ができる。

[2] 2 が余る場合

1 が 4 個、2 が 2 個、3 が 2 個を用いるので、

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420$$

より 420 個の整数ができる。

[3] 3 が余る場合

1 が 4 個、2 が 3 個、3 が 1 個を用いるので、

$$\frac{8!}{4!3!1!} = 280$$

より 280 個の整数ができる。

以上[1], [2], [3]より、

$$560 + 420 + 280 = 1260$$

より 1260 個の整数ができる。このうち 33000000 以上の整数の数は、33○○○○○○の○の中に1と2を入れたものなので、同様に場合分けして考える。

[1] 1 が余る場合

1 が 3 個、2 が 3 個を用いるので、

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

より 20 個の整数ができる。

[2] 2 が余る場合

1 が 4 個、2 が 2 個を用いるので、

$$\frac{6!}{4!2!} = 15$$

より 15 個の整数ができる。

以上[1], [2]より、33000000 以上の整数は

$$20 + 15 = 35$$

より 35 個あるので、33000000 より小さい整数は

$$1260 - 35 = 1225$$

より 1225 個ある。

(4)

1 回のサイコロを投げて 4 以下が出るという事象を A 、5 以上が出るという事象を B とすると

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

である。サイコロを 2 回投げて -1 から原点に移動するのは事象 A, B が 1 回ずつ起こるときなので、その確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{9}$$

である。最初 -2 にいてサイコロを 5 回投げ、 A が x 回、 B が $5-x$ 回起きたとき原点の右側にいるときの x の条件は、

$$-2 - x + 2(5-x) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x < 8$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$$

なので A が 2 回以下のときに条件を満たす。

A が 0 回、 B が 5 回起こる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

であり、 A が 1 回、 B が 4 回起こる確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot {}_5C_1 = \frac{10}{243}$$

であり、 A が 2 回、 B が 3 回起こる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot {}_5C_2 = \frac{40}{243}$$

である。よって求める確率は、

$$\frac{1}{243} + \frac{10}{243} + \frac{40}{243} = \frac{17}{81}$$

である。

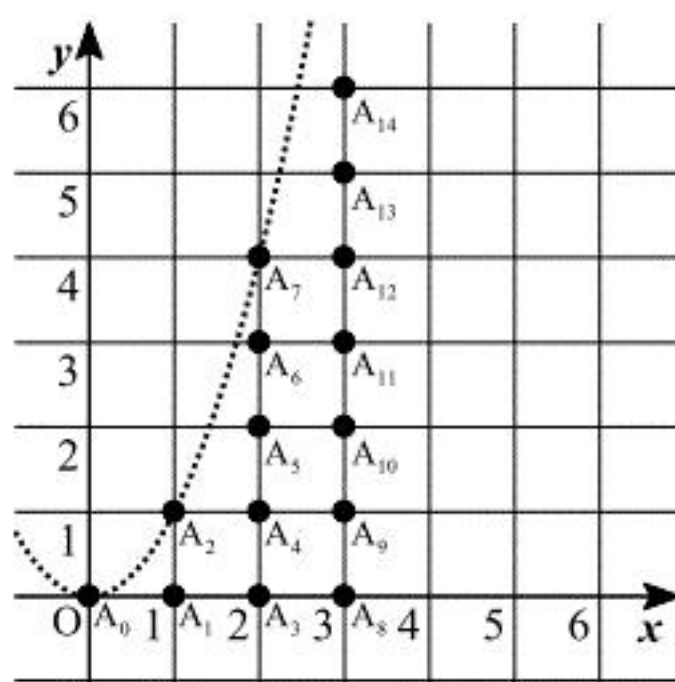
〔2〕

〔解答〕

ア 3 イ 3 ウ 229 エ 3 オ 13

〔解説〕

(1)



$A_7(2, 4)$ の次が $A_8(3, 0)$ であり、 $11-8=3$ よりその3つ後の点なので $A_{11}(3, 3)$ である。

(2)

直線 $x=j(j=0, 1, 2, 3, \dots)$ 上には、 $0 \leq y \leq x^2$ を満たす点 (x, y) は $y=0, 1, \dots, j^2$ の j^2+1 個あるため、 $0 \leq x \leq 8$ の範囲内には

$$\sum_{j=0}^8 (j^2 + 1) = 9 + \frac{8 \cdot (8+1) \cdot (8 \cdot 2 + 1)}{6} = 213$$

より213個の点がある。ゆえに214番目の点が $(9, 0)$ であるため、 $(9, 17)$ は

$$214 + 17 = 231$$

より231番目の点である。よって $n+1=231$ より $n=230$ である。

(3)

(2)と同様に考えると、 k が正の整数のとき $0 \leq x \leq k-1$ の範囲内には

$$\sum_{j=0}^{k-1} (j^2 + 1) = k + \frac{(k-1) \cdot k \cdot \{(k-1) \cdot 2 + 1\}}{6} = \frac{2k^3 - 3k^2 + 7k}{6}$$

より $\frac{2k^3 - 3k^2 + 7k}{6}$ 個の点がある。ゆえに $\frac{2k^3 - 3k^2 + 7k}{6} + 1$ 番目の点が $(k, 0)$ であるため、

(k, k) は

$$\frac{2k^3 - 3k^2 + 7k}{6} + 1 + k = \frac{2k^3 - 3k^2 + 13k}{6} + 1$$

より $\frac{2k^3 - 3k^2 + 13k}{6} + 1$ 番目の点である。よって $n+1 = \frac{2k^3 - 3k^2 + 13k}{6} + 1$ より

$$n = \frac{2k^3 - 3k^2 + 13k}{6} \text{ である。}$$

〔3〕

〔解答〕

ア 33 イ 7 ウ 73 エ 59

〔解説〕

(1)

A, B, C の当たりくじの確率はそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{10}$ であり、はずれくじの確率はそれぞれ

$\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{7}{10}$ となる。少なくとも1本が当たりくじという事象はすべてはずれくじという事象の

余事象なので、求める確率は

$$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{33}{40} \quad \cdots \text{①}$$

となる。

(2)

2本が当たりくじとなるのは以下の3パターンがあるので、その確率の和を求める。

[1] A がはずれくじで B, C が当たりくじの確率

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{120}$$

である。

[2] B がはずれくじで A, C が当たりくじの確率

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{120}$$

である。

[3] C がはずれくじで A, B が当たりくじの確率

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{14}{120}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は

$$\frac{18}{120} + \frac{3}{120} + \frac{14}{120} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24} \quad \cdots \text{②}$$

となる。

(3)

3本とも当たりくじの確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{120} \quad \cdots \text{③}$$

なので、1本が当たりくじ、2本がはずれくじとなる確率は①、②、③より

$$\frac{33}{40} - \frac{7}{24} - \frac{6}{120} = \frac{58}{120} \quad \cdots \text{④}$$

である。②、③、④より求める期待値は

$$\begin{aligned} \frac{58}{120} \cdot 1 + \frac{7}{24} \cdot 2 + \frac{6}{120} \cdot 3 &= \frac{58 + 70 + 18}{120} \\ &= \frac{146}{120} \\ &= \frac{73}{60} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$X=1$ となる確率は A で当たりをひく確率なので $\frac{1}{4}$ である。

$X=2$ となる確率は A ではずれを、B で当たりをひく確率なので

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

である。

$X=3$ となる確率は A, B ではずれを、C で当たりをひく確率なので

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$$

である。

以上より、求める期待値は

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{40} \cdot 3 = \frac{59}{40}$$

となる。

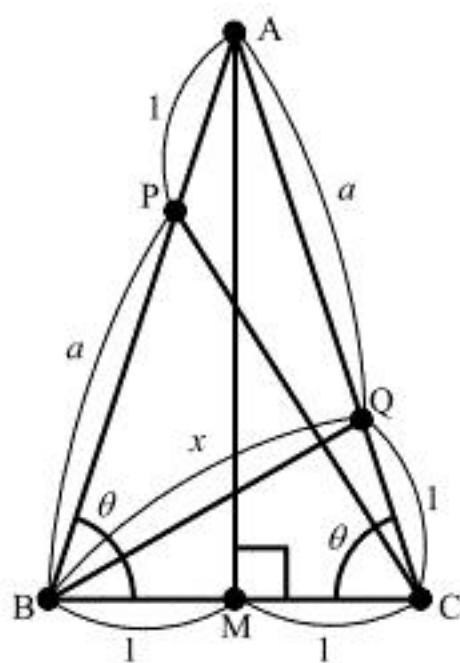
〔4〕

〔解答〕

ア 5 イ 1 ウ $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ エ $\sqrt{5}$

〔解説〕

(1)



$\angle ABC = \angle ACB = \theta$ とおく。また線分 BC の中点を M とおくと、 $\angle AMC = \angle AMB = 90^\circ$ なので

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{MC}{AC} \\ &= \frac{1}{a+1}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle BCQ$ に余弦定理を用いて、

$$BQ^2 = BC^2 + CQ^2 - 2BC \cdot CQ \cdot \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 + 1 - 4 \cdot \frac{1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5a+1}{a+1}$$

となる。よって $s=5, t=1$ である。

(2)

$x^2 = \frac{5a+1}{a+1}$ に $x=a+1$ を代入し、

$$(a+1)^2 = \frac{5a+1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^3 = 5a+1$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2 - 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 + 3a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

となる。 a は正の定数なので $a = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ である。

(3)

$x^2 = \frac{5a+1}{a+1}$ に $x=a$ を代入し、

$$a^2 = \frac{5a+1}{a+1}$$

となる。 $\triangle BCP$ に余弦定理を用いて、

$$CP^2 = BC^2 + BP^2 - 2BC \cdot BP \cdot \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow CP^2 = 4 + a^2 - 4a \cdot \frac{1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow CP^2 = 4 + \frac{5a+1}{a+1} - 4a \cdot \frac{1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow CP^2 = 4 + \frac{a+1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow CP^2 = 5$$

となる。 $CP > 0$ より $CP = \sqrt{5}$ である。

〔5〕

〔解答〕

ア 1301 イ 1156 ウ 6 エ 676 オ 0

〔解説〕

(1)

$x \equiv 0 \pmod{2}$ のとき $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$ であり、 $x \equiv 1 \pmod{2}$ のとき $x^2 \equiv 1 \pmod{2}$ である。 y についても同様であるため、 $x^2 + y^2 + 2 \equiv 0 \pmod{2}$ であることは x, y がともに奇数であるもしくはともに偶数であることと同値である。 $1 \leq x \leq 51$ の中に奇数は26個、偶数は25個あるため、集合 A_2 の要素の個数は

$$\begin{aligned} 26^2 + 25^2 &= (25+1)^2 + 25^2 \\ &= 2 \cdot 25^2 + 50 + 1 \\ &= 25 \cdot 50 + 50 + 1 \\ &= 26 \cdot 50 \\ &= 1301 \end{aligned}$$

より1301個ある。

(2)

$x \equiv 0 \pmod{3}$ のとき $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ 、 $x \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ 、 $x \equiv 2 \pmod{3}$ のとき $x^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$ である。 y についても同様であるため、 $x^2 + y^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ であることは x, y のうち一方が3の倍数で、もう一方が3の倍数でないことと同値である。 $1 \leq x \leq 51$ の中に3の倍数は17個あるため、集合 A_3 の要素の個数は

$$\begin{aligned} 17 \cdot (51-17) \cdot 2 &= 34^2 \\ &= (30+4)^2 \\ &= 900 + 240 + 16 \\ &= 1156 \end{aligned}$$

より1156個ある。

(3)

$x^2 + y^2 + 2 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \equiv 0, 2, 4 \pmod{6}$ であり、
 $x^2 + y^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \equiv 0, 3 \pmod{6}$ であるため、

$(x^2 + y^2 + 2 \equiv 0 \pmod{2}) \wedge (x^2 + y^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \equiv 0 \pmod{6}$ がいえる。よって

$A_2 \cap A_3 = A_6$ である。

(4)

集合 B の範囲で、すなわち x, y がともに奇数の範囲内で A_4 もしくは A_8 に含まれる要素の個数を考える。

$x \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow x \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod{8}$ であり、

$$x \equiv \pm 1 \pmod{8} \Leftrightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$x \equiv \pm 3 \pmod{8} \Leftrightarrow x^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるため、 $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ 、 $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ である。よって、

$$x^2 + y^2 + 2 \equiv 4 \pmod{8}$$

であるため、いかなる奇数 x, y に対しても $x^2 + y^2 + 2$ は4の倍数であり8の倍数でない。よって、 $B \cap A_4 = B$ よりその要素の個数は

$$\begin{aligned} 26^2 &= (30-4)^2 \\ &= 900 - 240 + 16 \\ &= 676 \end{aligned}$$

より676個であり、 $B \cap A_8$ の要素の個数は0個である。

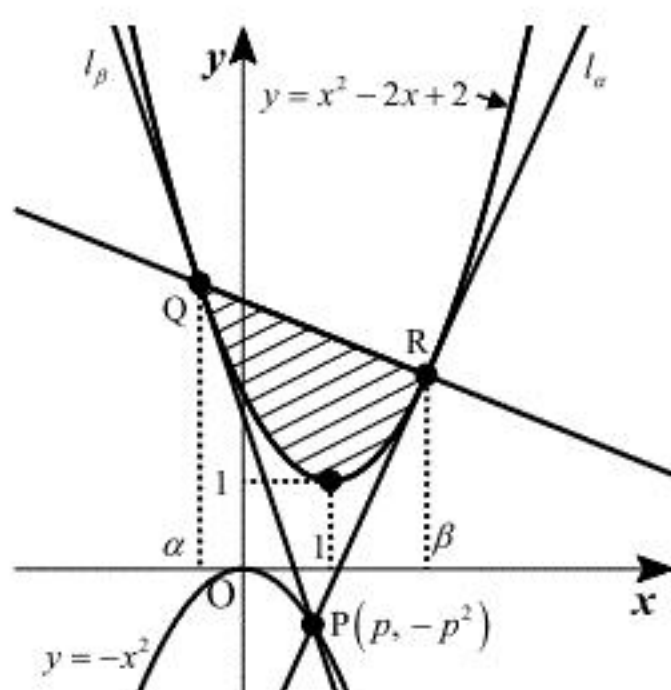
〔6〕

〔解答〕

ア 2 イ ー ウ 2 エ 6 オ 6

〔解説〕

(1)



点 Q, R における放物線 $y = x^2 - 2x + 2$ の接線を l_α, l_β とおく。 $y' = 2x - 2$ より、 l_α の式は

$$y - (\alpha^2 - 2\alpha + 2) = (2\alpha - 2)(x - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = (2\alpha - 2)x - \alpha^2 + 2$$

となる。同様に l_β の式は

$$y = (2\beta - 2)x - \beta^2 + 2$$

となる。これらの点が $P(p, -p^2)$ を通るので、

$$-p^2 = (2\alpha - 2)p - \alpha^2 + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-p^2 = (2\beta - 2)p - \beta^2 + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①、②より、

$$(2\alpha - 2)p - \alpha^2 + 2 = (2\beta - 2)p - \beta^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2p(\alpha - \beta) - \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2p(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \{2p - (\alpha + \beta)\}(\alpha - \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2p - (\alpha + \beta) = 0 (\because \alpha \neq \beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 2p$$

である。これと①より、

$$-p^2 = (2\alpha - 2)p - \alpha^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow -p^2 = 2\alpha p - 2p - \alpha^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow -p^2 = \alpha(\alpha + \beta) - 2p - \alpha^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow -p^2 = \alpha\beta - 2p + 2$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta = -p^2 + 2p - 2$$

となる。

(2)

線分 QR と放物線 $y = x^2 - 2x + 2$ に囲まれた部分の面積を S とする。このとき、

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \end{aligned}$$

である。したがって S が最小となるのは $\beta - \alpha$ が最小となることと同値であり、 $\beta - \alpha > 0$ より

これは $(\beta - \alpha)^2$ が最小であることと同値である。よって、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4p^2 - 4(-p^2 + 2p - 2) \\ &= 8p^2 - 8p + 8 \\ &= 8\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + 6 \end{aligned}$$

より $p = \frac{1}{2}$ のとき最小値をとる。このとき $(\beta - \alpha)^2 = 6$ より $\beta - \alpha = \sqrt{6}$ なので、

$$\begin{aligned} S &= \frac{(\sqrt{6})^3}{6} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

である。