

【1】

ア $\frac{7}{6}$ イ $\frac{1}{2}$ ウ $-2+2\sqrt{2}$ エ 2 オ $\frac{1}{4}$ カ $3-2\sqrt{2}$
キ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ク $2-\sqrt{2}$ ケ $\frac{25}{81}$ コ $\frac{32}{81}$ サ $\frac{1}{3}$

【解説】

(1)

α は $3x^2+4x-1=0$ の解であるから、

$$\alpha \neq 1$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha} &= A+B\alpha \\ \Leftrightarrow 1 &= (A+B\alpha)(1-\alpha) \\ \Leftrightarrow B\alpha^2 + (A-B)\alpha + 1 - A &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}3\alpha^2 + 4\alpha - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= \frac{1}{3}(1-4\alpha)\end{aligned}$$

であるから、これを①に代入して、

$$\begin{aligned}B \cdot \frac{1}{3}(1-4\alpha) + (A-B)\alpha + 1 - A &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(A - \frac{7}{3}B\right)\alpha + \left(-A + \frac{1}{3}B + 1\right) &= 0\end{aligned}$$

となる。 $A - \frac{7}{3}B$ 、 $-A + \frac{1}{3}B + 1$ は有理数、 α は無理数であるから、上式が成立する条件は、

$$\begin{cases} A - \frac{7}{3}B = 0 \\ -A + \frac{1}{3}B + 1 = 0 \end{cases}$$

である。これを解くと、

$$(A, B) = \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}f(x) &= |x^2 - mx| \\ &= \left| \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} \right|\end{aligned}$$

である。 m の値によって 3 通りに場合分けして考える。

[1] $\frac{m}{2} < 0$ 、すなわち $m < 0$ のとき

このとき、 $0 \leq x \leq 1$ では、 $x \geq 0$ 、 $x - m > 0$ より $x(x - m) \geq 0$ なので

$$\begin{aligned}f(x) &= |x(x - m)| \\ &= x^2 - mx\end{aligned}$$

である。

$$f'(x) = 2x - m$$

より $0 \leq x \leq 1$ で

$$f'(x) \geq -m > 0$$

である。従って $f(x)$ は単調増加するので、 $0 \leq x \leq 1$ での $f(x)$ の最大値は、

$$g(m) = f(1) = -m + 1$$

である。

[2] $0 \leq \frac{m}{2} \leq 1$ 、すなわち $0 \leq m \leq 2$ のとき

このとき

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx = -\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4} & (0 < x < m) \\ x^2 - mx = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} & (m \leq x) \end{cases}$$

である。 $0 \leq x \leq 1$ で $f(x)$ の増減は以下のようになる。

$(0 \leq m \leq 1 \text{ のとき})$							
x	0		$\frac{m}{2}$		m		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{m^2}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1 - m$

$(1 \leq m \text{ のとき})$							
x	0		$\frac{m}{2}$		1		m
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{m^2}{4}$	$\searrow$	$m - 1$	$\searrow$	0

よって、 $f(x)$ は $1 \leq m$ のとき $x = \frac{m}{2}$ で最大であり、 $0 \leq m \leq 1$ のとき

$$x = \frac{m}{2} \text{ または } x = 1$$

で最大となる。 $0 \leq m \leq 1$ のときの $f\left(\frac{m}{2}\right)$ と $f(1)$ の大小を調べる。

$$\begin{aligned}f\left(\frac{m}{2}\right) &= \left|\frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2}\right| = \frac{m^2}{4} \\ f(1) &= 1 - m\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}f\left(\frac{m}{2}\right) - f(1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - (1 - m) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 4m - 4 &\geq 0 \\ \therefore -2 + 2\sqrt{2} &\leq m \leq 1 \quad (\because 0 \leq m \leq 1)\end{aligned}$$

である。したがって、 $0 \leq m \leq -2 + 2\sqrt{2}$ のとき、

$$g(m) = f(1) = -m + 1$$

であり、 $-2 + 2\sqrt{2} < m \leq 2$ のとき、

$$g(m) = f\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4}$$

となる。

[3] $\frac{m}{2} > 1$ 、すなわち $m > 2$ のとき

このとき、 $0 \leq x \leq 1$ では、 $x \geq 0$ 、 $x - m < 0$ より $x(x - m) \leq 0$ なので

$$\begin{aligned}f(x) &= |x(x - m)| \\ &= -x(x - m) \\ &= mx - x^2\end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq 1$ で

$$\begin{aligned}f'(x) &= m - 2x \\ &> 2 - 2 \cdot 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

より $f(x)$ は単調増加するので $0 \leq x \leq 1$ での $f(x)$ の最大値は、

$$g(m) = f(1) = m - 1$$

である。

以上[1]、[2]、[3]より、

$$g(m) = \begin{cases} -m + 1 & (m \leq -2 + 2\sqrt{2}) \\ \frac{m^2}{4} & (-2 + 2\sqrt{2} < m \leq 2) \\ m - 1 & (2 < m) \end{cases}$$

である。 $-m + 1$ は m について単調減少関数で、 $m - 1$ は単調増加関数である。また、 $\frac{m^2}{4}$ は

$-2 + 2\sqrt{2} < m \leq 2$ で単調増加であり、 $g(m)$ は $m = -2 + 2\sqrt{2}$ 、 2 で連続であるから、 $g(m)$ の

最小値は、 $m = -2 + 2\sqrt{2}$ のときにとる。したがって、 $g(m)$ の最小値は

$$\begin{aligned}g(-2 + 2\sqrt{2}) &= 1 - (-2 + 2\sqrt{2}) \\ &= 3 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}h(m) &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 |x^2 - mx| dx \\ &= \int_0^1 |x(x - m)| dx\end{aligned}$$

であるから、 m と $0, 1$ の大小関係によって場合分けをして考える。

[1] $m \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}h(m) &= \int_0^1 (x^2 - mx) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{m}{2}\end{aligned}$$

であるから、この範囲で $h(m)$ は $m = 0$ のとき最小値 $\frac{1}{3}$ をとる。

[2] $0 < m < 1$ のとき

$$\begin{aligned}h(m) &= -\int_0^m (x^2 - mx) dx + \int_m^1 (x^2 - mx) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 \right]_0^m + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 \right]_m^1 \\ &= -2\left(\frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{2}m^3 \right) + \frac{1}{3} - \frac{m}{2} \\ &= \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。 $0 < m < 1$ のとき、

$$\begin{aligned}h'(m) &= m^2 - \frac{1}{2} \\ &> 0\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}h'(m) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0 < m < 1)\end{aligned}$$

したがって、 $0 < m < 1$ における $h(m)$ の増減表は次のとおりである。

m	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(1)
$h'(m)$		$-$	0	$+$	
$h(m)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\begin{aligned}h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

であるから、このとき $h(m)$ は $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\frac{2 - \sqrt{2}}{6}$ をとる。

[3] $m \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}h(m) &= -\int_0^1 (x^2 - mx) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{m}{2} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

であるから、このとき $h(m)$ は $m = 1$ のとき最小値 $\frac{1}{6}$ をとる。

[1]、[2]、[3]の最小値を比較すると、 $h(m)$ が最小となるのは $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときで、最小値は

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{6} \text{ となる。}$$

(4)

(i)

このとき、1 のカードは 2 枚、2 のカードは 3 枚、3 のカードは 4 枚である。 $X + Y = 4$ となるのは

$$(X, Y) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

のいずれかの場合なので、 $X + Y = 4$ となる確率は、

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} + \left(\frac{3}{9}\right)^2 + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{25}{81}$$

と求まる。

(ii)

$X + Y = 3$ となるのは

$$(X, Y) = (1, 2), (2, 1)$$

となる場合なので、 $X + Y = 3$ となる確率は、

$$\frac{a}{9} \cdot \frac{b}{9} \cdot 2 = \frac{2}{81}ab$$

と求まる。したがって、 ab の積が最大となると、 $X + Y = 3$ となる確率が最大となる。

$a + b + c = 9$ より

$$b = 9 - a - c$$

と表せるので、このとき、

$$\begin{aligned}ab &= a(9 - c - a) \\ &= -a^2 + (9 - c)a \\ &= -\left(a - \frac{9 - c}{2}\right)^2 + \left(\frac{9 - c}{2}\right)^2\end{aligned}$$

となる。したがって、 ab は $a = b = \frac{9 - c}{2}$ のとき最大値 $\left(\frac{9 - c}{2}\right)^2$ をとる。この最大値は、 $1 \leq c \leq$

9 の範囲では $c = 1$ のとき最大となる。このとき

$$a = b = 4$$

となり、 a, b は $1 \leq a, 1 \leq b$ を満たす。以上より、 $X + Y = 3$ が最大となるのは $a = b = 4, c = 1$ の

ときで、その確率は、

$$\frac{2}{81} \cdot 16 = \frac{32}{81}$$

である。

(iii)

$X = Y$ となる確率を P とする。 P を a, b, c を用いて表すと、

$$P = \left(\frac{a}{9}\right)^2 + \left(\frac{b}{9}\right)^2 + \left(\frac{c}{9}\right)^2$$

となる。

$$a + b + c = 9 \Leftrightarrow c = 9 - a - b$$

であるから、

$$\begin{aligned}P &= \left(\frac{a}{9}\right)^2 + \left(\frac{b}{9}\right)^2 + \left(\frac{9 - a - b}{9}\right)^2 \\ &= \frac{1}{81}(a^2 + b^2 + 81 + a^2 + b^2 - 18a - 18b + 2ab) \\ &= \frac{1}{81}\{2a^2 + 2(b - 9)a + 2b^2 - 18b + 81\} \\ &= \frac{1}{81}\left\{2\left(a + \frac{b - 9}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{b - 9}{2}\right)^2 + 2b^2 - 18b + 81\right\} \\ &= \frac{1}{81}\left\{2\left(a + \frac{b - 9}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}b^2 - 9b + \frac{81}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{81}\left\{2\left(a + \frac{b - 9}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(b - 3)^2 + 27\right\}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 P が最小となると、

$$\begin{cases} a + \frac{b - 9}{2} = 0 \\ b - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow a = b = 3 \end{cases}$$

である。このときの P の値は、

$$\begin{aligned}P &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。

〔2〕

$$\text{ア} \quad \frac{1}{2} \quad \text{イ} \quad \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1 \quad \text{ウ} \quad \frac{1}{2} \quad \text{エ} \quad -5000 \quad \text{オ} \quad \frac{1}{2} \quad \text{カ} \quad 5000$$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}(y^2 - x^2) - (y - x)^2 &= (y + x)(y - x) - (y - x)^2 \\ &= (y - x)\{(y + x) - (y - x)\} \\ &= 2x(y - x)\end{aligned}$$

であるから,

$$x(y - x) = \frac{1}{2}\{(y^2 - x^2) - (y - x)^2\}$$

となる。

(2)

条件より, $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}(a_1 - 0)^2 &= 1 \\ \therefore a_1 &= 1 \quad (\because a_1 > a_0 = 0)\end{aligned}$$

と求まる。同様にして,

$$\begin{aligned}(a_2 - a_1)^2 + (a_1 - 0)^2 &= 2^2 \\ \Leftrightarrow (a_2 - 1)^2 &= 3 \\ \therefore a_2 &= \sqrt{3} + 1 \quad (\because a_2 > a_1 = 1) \\ (a_3 - a_2)^2 + (a_2 - a_1)^2 + (a_1 - 0)^2 &= 3^2 \\ \Leftrightarrow (a_3 - \sqrt{3} - 1)^2 + 2^2 &= 3^2 \\ \Leftrightarrow (a_3 - \sqrt{3} - 1)^2 &= 5 \\ \therefore a_3 &= \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1 \quad (\because a_3 > a_2 = \sqrt{3} + 1)\end{aligned}$$

と求まる。また, (1)の結果より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} a_{k-1}(a_k - a_{k-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} \{(a_k^2 - a_{k-1}^2) - (a_k - a_{k-1})^2\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} (a_k^2 - a_{k-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} (a_k - a_{k-1})^2 \\ &= \frac{1}{2} \{(a_1^2 - a_0^2) + (a_2^2 - a_1^2) + \cdots + (a_{100}^2 - a_{99}^2)\} - \frac{1}{2} \cdot 100^2 \\ &= \frac{1}{2} \{(a_{100})^2 - (a_0)^2\} - 5000 \\ &= \frac{1}{2} (a_{100})^2 - 5000\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}y(y - x) &= y^2 - xy \\ &= y^2 - x(y - x) - x^2 \\ &= y^2 - x^2 - x(y - x)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} a_k(a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{100} (a_k^2 - a_{k-1}^2) - \sum_{k=1}^{100} a_{k-1}(a_k - a_{k-1}) \\ &= (a_{100})^2 - \left\{ \frac{1}{2} (a_{100})^2 - 5000 \right\} \\ &= \frac{1}{2} (a_{100})^2 + 5000\end{aligned}$$

となる。

【3】

【解答】

ア 2 イ 3 ウ -1 エ 12

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\tan \frac{\pi}{12} &= \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

と計算できるので,

$$\tan \frac{\pi}{12} = a - \sqrt{b}$$

のとき,

$$a = 2, b = 3$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{1+xy} &= \frac{\tan \frac{25}{28} \pi - \tan \frac{\pi}{7}}{1 + \tan \frac{25}{28} \pi \tan \frac{\pi}{7}} \\ &= \tan \left(\frac{25}{28} \pi - \frac{\pi}{7} \right) \\ &= \tan \frac{3}{4} \pi \\ &= -1\end{aligned}$$

である。

(3)

$$a_k = \tan b_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < b_k < \frac{\pi}{2} \right)$$

とおく。 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ として一般性を失わない。このとき

$$-\frac{\pi}{2} < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n < \frac{\pi}{2}$$

及び

$$\frac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} = \tan(b_i - b_j)$$

が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} \leq a - \sqrt{b} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \tan(b_i - b_j) \leq \tan \frac{\pi}{12} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。ここで、 $-\frac{\pi}{2} < b_i < \frac{\pi}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} < -b_j < \frac{\pi}{2}$ より $-\pi < b_i - b_j < \pi$ であるから,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow -\pi < b_i - b_j \leq -\frac{11}{12} \pi, 0 \leq b_i - b_j \leq \frac{\pi}{12} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。②が成り立つような b_i, b_j ($i \neq j$) が必ず存在するような正の整数 n の最小値が $n=12$

であることを示す。2点 b_i, b_j ($i \neq j$) の距離 $|b_i - b_j|$ の最小値は隣り合った2点の差

$b_2 - b_1, \dots, b_n - b_{n-1}$ のうちの最小値に等しく、最大値は $b_n - b_1$ に等しいことから,

②が成り立つ b_i, b_j ($i \neq j$) が存在しない

$$\Leftrightarrow 0 \leq |b_i - b_j| \leq \frac{\pi}{12} \text{ または } \frac{11}{12} \pi \leq |b_i - b_j| < \pi \text{ を満たす } b_i, b_j \text{ (} i \neq j \text{) が存在しない}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の2点 } b_i, b_j \text{ (} i \neq j \text{) の距離について, } \frac{\pi}{12} < |b_i - b_j| < \frac{11}{12} \pi \text{ が成り立つ}$$

$$\Leftrightarrow b_{k+1} - b_k > \frac{\pi}{12} \text{ (} k=1, \dots, n-1 \text{) かつ } b_n - b_1 < \frac{11}{12} \pi \text{ が成り立つ} \quad \dots \textcircled{3}$$

と言い換えることができる。したがって、 $n \leq 11$ のとき

$$b_k = \left(\frac{k}{11} - \frac{1}{2} - \frac{1}{22} \right) \pi \quad (k=1, \dots, n)$$

とすると,

$$\begin{aligned}b_1 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{22} \right) \pi > -\frac{\pi}{2} \\ b_{11} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{22} \right) \pi < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

より、 $-\frac{\pi}{2} < b_k < \frac{\pi}{2}$ ($k=1, \dots, n$) を満たす。また,

$$b_{k+1} - b_k = \frac{\pi}{11} > \frac{\pi}{12} \quad (k=1, \dots, n-1)$$

$$b_n - b_1 = \frac{n-1}{11} \pi \leq \frac{10}{11} \pi < \frac{11}{12} \pi$$

となり、③を満たす。したがって、 $n \leq 11$ のとき②を満たす b_i, b_j ($i \neq j$) が存在しない例が示されたため、②が成り立つ b_i, b_j ($i \neq j$) が必ず存在する n の最小値は12以上である。

次に、 $n=12$ のとき②が成り立つ b_i, b_j ($i \neq j$) が必ず存在することを示す。そのような b_i, b_j が存在しない例があると仮定する。このとき、③を満たす例が存在し,

$$b_{k+1} - b_k > \frac{\pi}{12} \quad (k=1, \dots, 11) \text{ かつ } b_{12} - b_1 < \frac{11}{12} \pi$$

となる。しかし、 $b_{k+1} - b_k > \frac{\pi}{12}$ の各辺を $k=1, \dots, 11$ について足し合わせると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{11} (b_{k+1} - b_k) &= \frac{\pi}{12} \cdot 11 \\ \Leftrightarrow b_{12} - b_1 &> \frac{11}{12} \pi\end{aligned}$$

となり、 $b_{12} - b_1 < \frac{11}{12} \pi$ であることに矛盾する。したがって、 $n=12$ のとき②が成り立つ b_i, b_j

($i \neq j$) が必ず存在することが示された。

以上より、求める最小値は $n=12$ である。

〔4〕

$$\text{ア} \quad -4 \quad \text{イ} \quad \sqrt{2} \quad \text{ウ} \quad \frac{1}{4} \quad \text{エ} \quad 16$$

〔解説〕

(1)

$$\log_2 x^4 y^3 = \log_2 \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow 4\log_2 x + 3\log_2 y = -4 \quad \cdots \text{①}$$

と求まる。

(2)

$$(\log_2 x)(\log_y 2) + (\log_2 y)(\log_x 2) = -\frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 y} + \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = -\frac{17}{4}$$

と変形できるので、 $X = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$ とおくと、 $x \neq 1$ より $X \neq 0$ なので

$$X + \frac{1}{X} = -\frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4X^2 + 17X + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4X+1)(X+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{4}, -4$$

と求まる。 $X = -\frac{1}{4}$ のとき、

$$\log_2 x = -\frac{1}{4}\log_2 y$$

であるから、上式を①に代入して、

$$-\log_2 y + 3\log_2 y = -4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y = -2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$

と求まる。このとき、

$$\log_2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

である。

(3)

(2)より、 $X = -4$ のとき、

$$\log_2 x = -4\log_2 y$$

であるので、上式を①に代入して、

$$-16\log_2 y + 3\log_2 y = -4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y = \frac{4}{13}$$

と求まる。したがって、

$$\log_2 x = -\frac{16}{13}$$

であるから、このとき $x < 1$ であり、

$$\log_2 \frac{y}{x^3} = \log_2 y - 3\log_2 x$$

$$= \frac{4}{13} - 3\left(-\frac{16}{13}\right)$$

$$= 4$$

$$\therefore \frac{y}{x^3} = 2^4 = 16$$

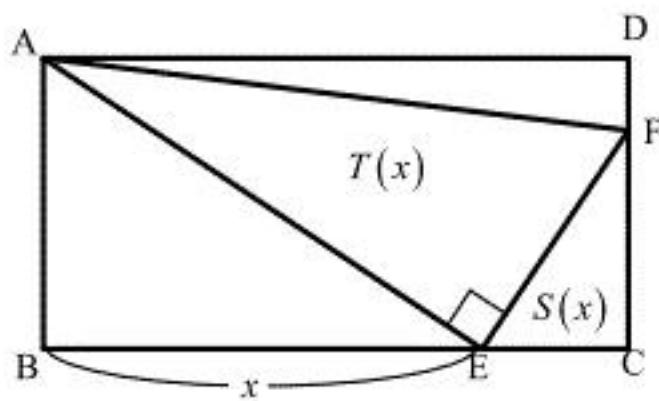
と求まる。

【5】

$$\text{ア} \quad \frac{2}{3} \quad \text{イ} \quad \frac{16}{27} \quad \text{ウ} \quad \frac{1}{3} \quad \text{エ} \quad \frac{25}{27} \quad \text{オ} \quad \frac{3}{5}$$

【解説】

(1)



$$\angle AEB + \angle AEF + \angle CEF = \pi$$

であり,

$$\angle AEF = \frac{\pi}{2}$$

であるから,

$$\angle AEB + \angle CEF = \frac{\pi}{2}$$

となる。また,

$$\angle EFC + \angle CEF = \frac{\pi}{2}$$

であるから,

$$\angle AEB = \angle EFC \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また,

$$\angle ABE = \angle ECF = \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから, ①, ②より

$$\triangle ABE \sim \triangle ECF \quad \dots \textcircled{3}$$

である。よって

$$\begin{aligned} AB : BE &= EC : CF \\ \Leftrightarrow AB \cdot CF &= BE \cdot EC \\ \Leftrightarrow CF &= x(2-x) \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} S(x) &= CE \cdot CF \cdot \frac{1}{2} \\ &= (2-x) \cdot x(2-x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}x(2-x)^2 \end{aligned}$$

と求まる。また,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2}(2-x)^2 + x(2-x) \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{2}(2-x)\{(2-x) - 2x\} \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(3x-2) \end{aligned}$$

であるので, $S(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		↗		↘	

ここで

$$S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{27}$$

であるから, $0 \leq x \leq 1$ において, $S(x)$ は $x = \frac{2}{3}$ のときに最大値 $\frac{16}{27}$ をとる。

(2)

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{AB^2 + BE^2} \\ &= \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

である。したがって, ③より,

$$\begin{aligned} AE : AB &= EF : EC \\ EF &= \frac{EC}{AB} AE \\ &= (2-x) \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

と求まる。したがって,

$$\begin{aligned} T(x) &= AE \cdot EF \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{x^2+1} \cdot (2-x) \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)(2-x) \end{aligned}$$

と求まる。よって,

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 2x(2-x) + \frac{1}{2}(x^2+1) \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{2}(-3x^2+4x-1) \\ &= -\frac{1}{2}(3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

であるから, $T(x)$ の増減表は次の通りである。

x	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$T'(x)$		-	0	+	0
$T(x)$		↘		↗	

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + 1 \right) \left(2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{5}{3} \\ &= \frac{25}{27} \end{aligned}$$

であるから, $0 \leq x \leq 1$ において, $T(x)$ は $x = \frac{1}{3}$ のときに最小値 $\frac{25}{27}$ をとる。このとき,

$$\begin{aligned} \tan \angle EFA &= \frac{EA}{EF} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{9}+1}}{\left(2-\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{9}+1}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。

〔6〕

$$\text{ア} \quad 3 \quad \text{イ} \quad 4 \quad \text{ウ} \quad 9 \quad \text{エ} \quad \frac{3}{8} \quad \text{オ} \quad \frac{1}{2}$$

〔解説〕

(1)

条件より、実数 s, t を用いて、

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{OQ}} = (1-s) \overrightarrow{\text{OA}} + s \overrightarrow{\text{OB}} \\ \overrightarrow{\text{OR}} = t \overrightarrow{\text{OC}} \end{cases}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{OQ}} + \overrightarrow{\text{OR}}) \\ &= \frac{1}{2} (1-s) \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{1}{2} s \overrightarrow{\text{OB}} + \frac{1}{2} t \overrightarrow{\text{OC}} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} + 2 \overrightarrow{\text{AP}} + 3 \overrightarrow{\text{BP}} + 4 \overrightarrow{\text{CP}} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 10 \overrightarrow{\text{OP}} - 2 \overrightarrow{\text{OA}} - 3 \overrightarrow{\text{OB}} - 4 \overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と変形できるので、②に①を代入すると、

$$\begin{aligned} 10 \left\{ \frac{1}{2} (1-s) \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{1}{2} s \overrightarrow{\text{OB}} + \frac{1}{2} t \overrightarrow{\text{OC}} \right\} - 2 \overrightarrow{\text{OA}} - 3 \overrightarrow{\text{OB}} - 4 \overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (3-5s) \overrightarrow{\text{OA}} + (5s-3) \overrightarrow{\text{OB}} + (5t-4) \overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}$ は一次独立であるから、上式が成り立つ条件は、

$$\begin{cases} 3-5s=0 \\ 5s-3=0 \\ 5t-4=0 \end{cases}$$

である。これを解くと、

$$(s, t) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OQ}} &= \frac{2}{5} \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{3}{5} \overrightarrow{\text{OB}} \\ \therefore \text{AQ} : \text{QB} &= 3 : 2 \\ \overrightarrow{\text{OR}} &= \frac{4}{5} \overrightarrow{\text{OC}} \\ \therefore \text{OR} : \text{RC} &= 4 : 1 \end{aligned}$$

である。

(2)

②より、

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \frac{1}{5} \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{3}{10} \overrightarrow{\text{OB}} + \frac{2}{5} \overrightarrow{\text{OC}}$$

である。直線 OP と平面 ABC が交わる点を S とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OS}} &= k \overrightarrow{\text{OP}} \quad \dots \textcircled{3} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OS}} &= \frac{k}{5} \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{3k}{10} \overrightarrow{\text{OB}} + \frac{2k}{5} \overrightarrow{\text{OC}} \end{aligned}$$

と表せるので、

$$\frac{k}{5} + \frac{3k}{10} + \frac{2k}{5} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{10}{9}$$

である。これを③に代入すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OS}} &= \frac{10}{9} \overrightarrow{\text{OP}} \\ \therefore \text{OP} : \text{PS} &= 9 : 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

点 T は直線 AP 上の点であるから、実数 a を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AT}} &= a \overrightarrow{\text{AP}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OT}} &= (1-a) \overrightarrow{\text{OA}} + a \overrightarrow{\text{OP}} \end{aligned}$$

と表せる。また、点 T は平面 OBC 上の点であるから、実数 b, c を用いて、

$$\overrightarrow{\text{OT}} = b \overrightarrow{\text{OB}} + c \overrightarrow{\text{OC}} \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。したがって、

$$(1-a) \overrightarrow{\text{OA}} + a \overrightarrow{\text{OP}} = b \overrightarrow{\text{OB}} + c \overrightarrow{\text{OC}}$$

である。①を代入して

$$\begin{aligned} (1-a) \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{1}{5} a \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{3}{10} a \overrightarrow{\text{OB}} + \frac{2}{5} a \overrightarrow{\text{OC}} - b \overrightarrow{\text{OB}} - c \overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{4}{5} a \right) \overrightarrow{\text{OA}} + \left(\frac{3}{10} a - b \right) \overrightarrow{\text{OB}} + \left(\frac{2}{5} a - c \right) \overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}$ は一次独立であるから、上式が成り立つ条件は、

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{5} a = 0 \\ \frac{3}{10} a - b = 0 \\ \frac{2}{5} a - c = 0 \end{cases}$$

である。これを解くと、

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right)$$

である。これを④に代入すると、

$$\overrightarrow{\text{OT}} = \frac{3}{8} \overrightarrow{\text{OB}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{OC}}$$

と求まる。