

【1】

【解答】

- (1) ア $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ イ $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ウ $-\frac{1}{2}$ エ $\frac{\sqrt{2}}{12}$
(2) オ 3 カ $3\sqrt{6}$
(3) キ 8 ク 1 ケ 2 コ 47 サ 3

【解説】

(1) 放物線 $y=x^2$ を平行移動させた放物線 C は $y=x^2+ax+b$ とおくことができる。ここで $f(x)=x^2+ax+b$ とおくと、放物線 $C:y=f(x)$ が直線 $y=x$ に点 (t, t) で接するとき

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'(t)=1 \\ f(t)=t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+a=1 \\ t^2+at+b=t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2t \\ b=t^2 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。放物線 C と放物線 $y=-x^2$ の共有点の x 座標は、 x についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2+ax+b &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2+(1-2t)x+t^2 &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

の解であるから、この 2 次方程式の判別式を D とおくと、放物線 C が放物線 $y=-x^2$ と共有点をもつ条件は

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1-2t)^2-8t^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2+4t-1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \leq t &\leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。 t の値がこの範囲にあるとき、①の実数解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=t-\frac{1}{2}, \alpha\beta=\frac{t^2}{2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。放物線 C と放物線 $y=-x^2$ とで囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2-f(x))dx \\ &= 2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} \end{aligned}$$

となる。②より

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-4 \cdot \frac{t^2}{2}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \right)^3 \end{aligned}$$

である。 $-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ が最大となるとき $S(t)$ が最大となるから、 $S(t)$ は

$$t=-\frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

をとる。

(2)

$x>0, x \neq 1, y>0, y \neq 1$ より

$$\begin{aligned} x^{\frac{y}{x}} &= y^{\frac{x}{y}} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x} &= \frac{x}{y} \log_x y \\ \Leftrightarrow \log_x y &= \frac{y^2}{x^2} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\log_x y = \frac{y^2}{x^2} = a$ とおくと、 $x < y$ であるから

$$a > 1$$

となり

$$\begin{aligned} \log_x y + \log_y x &= \frac{13}{6} \\ \Leftrightarrow \log_x y + \frac{1}{\log_x y} &= \frac{13}{6} \\ \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} &= \frac{13}{6} \\ \Leftrightarrow 6a^2-13a+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a-3)(3a-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3}{2} (\because a > 1) \end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{x^2} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{3}{2}x^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\sqrt{6}}{2}x (\because x > 0, y > 0) \end{aligned}$$

となるから、 $\log_x y = a$ より

$$\begin{aligned} \log_x \frac{\sqrt{6}}{2}x &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \log_x \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \log_x \frac{\sqrt{6}}{2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \log_x \frac{3}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

である。

(3)

病気 A にかかっている人数が 25 人中 k ($0 \leq k \leq 25$) 人である確率 P_k は

$$\begin{aligned} P_k &= {}_{25}C_k \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(1-\frac{1}{10}\right)^{25-k} \\ &= \frac{25!}{k!(25-k)!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(1-\frac{1}{10}\right)^{25-k} \end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq k \leq 24$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 &= \frac{\frac{25!}{(k+1)!(25-(k+1))!} \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1} \left(1-\frac{1}{10}\right)^{25-(k+1)}}{\frac{25!}{k!(25-k)!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(1-\frac{1}{10}\right)^{25-k}} - 1 \\ &= \frac{25-k}{k+1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} - 1 \\ &= \frac{25-k}{9(k+1)} - 1 \\ &= \frac{2(8-5k)}{9(k+1)} \end{aligned}$$

である。

[1] $\frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 > 0$ のとき

$$\begin{aligned} P_k &> 0 \text{ であるから} \\ \frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 > 0 &\Leftrightarrow P_k < P_{k+1} \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(8-5k)}{9(k+1)} > 0 \\ \Leftrightarrow k < \frac{8}{5} \end{aligned}$$

を満たす整数 k の値の範囲は $0 \leq k \leq 1$ である。

[2] $\frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 = 0$ のとき

$$\begin{aligned} P_k &> 0 \text{ であるから} \\ \frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 = 0 &\Leftrightarrow P_k = P_{k+1} \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(8-5k)}{9(k+1)} = 0 \\ \Leftrightarrow k = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

を満たす整数 k の値は存在しない。

[3] $\frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 < 0$ のとき

$$\begin{aligned} P_k &> 0 \text{ であるから} \\ \frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 < 0 &\Leftrightarrow P_k > P_{k+1} \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}}{P_k} - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(8-5k)}{9(k+1)} < 0 \\ \Leftrightarrow k > \frac{8}{5} \end{aligned}$$

を満たす整数 k の値の範囲は $2 \leq k \leq 24$ である。

以上、[1], [2], [3]より

$$P_0 < P_1 < P_2 > P_3 > P_4 > \cdots > P_{24} > P_{25} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となるから、 P_k が最大となる k は $k=2$ の場合である。さらに、このとき

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{25!}{2!23!} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1-\frac{1}{10}\right)^{23} \\ &= 3^{47} \times 10^{-23} \end{aligned}$$

となる。また、③より $k=2$ の場合の次に P_k が大きくなり得るのは $k=1$ または $k=3$ の場合である

あり

$$\begin{aligned} \frac{P_3}{P_1} &= \frac{\frac{25!}{3!22!} \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(1-\frac{1}{10}\right)^{22}}{\frac{25!}{1!24!} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(1-\frac{1}{10}\right)^{24}} \\ &= \frac{92}{81} \\ &> 1 \end{aligned}$$

かつ $P_1 > 0$ であるから $P_3 > P_1$ となり、 $k=2$ の場合の次に P_k が大きいのは $k=3$ の場合である。

〔2〕

〔解答〕

- (1) ア $\frac{1}{4}$
(2) イ $-9+5\sqrt{5}$
(3) ウ 3 エ 6 オ 4 カ 6

〔解説〕

- (1) 図形 S の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。 $y=b$ が S を 2 つの部分に分けるとき

$$0 < b < 1$$

である。 $y=x^2, y=b$ の交点の x 座標は $x=\pm\sqrt{b}$ ($\because b>0$) であるから、 $y=x^2, x=1, y=b$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

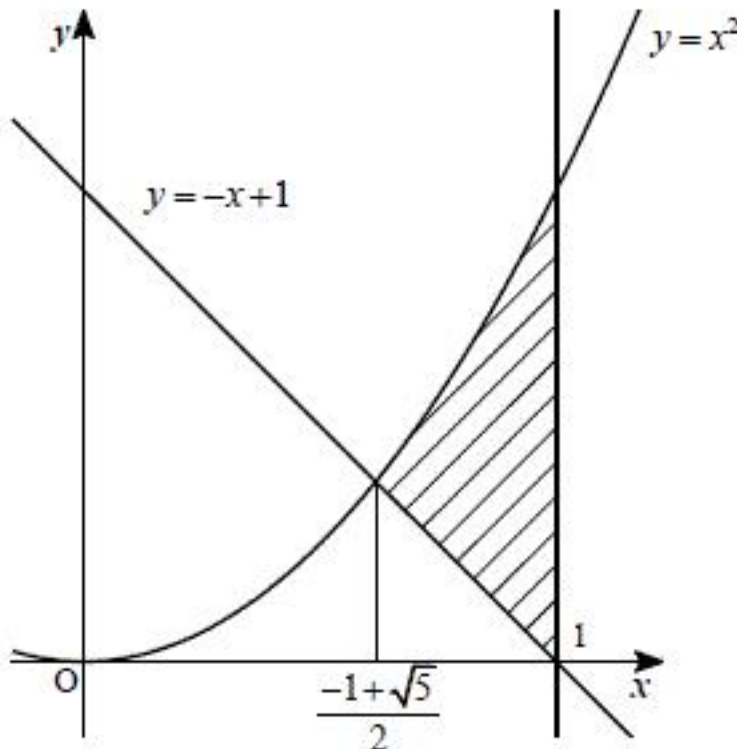
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\sqrt{b}}^1 (x^2 - b) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - bx \right]_{\sqrt{b}}^1 \\ &= \frac{2}{3} b\sqrt{b} - b + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となるから、 $y=b$ が S を面積の等しい 2 つの部分に分けると

$$\begin{aligned} S_1 &= 2S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} &= 2 \left(\frac{2}{3} b\sqrt{b} - b + \frac{1}{3} \right) \\ \Leftrightarrow 4b\sqrt{b} - 6b + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{b} - 1)(2b - 2\sqrt{b} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{b} &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < \sqrt{b} < 1) \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

(2)



$y=x^2, y=-x+1$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= -x+1 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $y=x^2, y=-x+1, x=1$ で囲まれた図形の面積を S_3 とすると

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \{(-x+1) - x^2\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \\ &= \frac{-9+5\sqrt{5}}{12} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$S_3 > \frac{1}{2} S_1$ であり、また直線 $y=-x+k$ が点 $(1,1)$ を通るとき $k=2$ であるから、直線 $y=-x+k$ が図形 S を面積の等しい 2 つの部分に分けうるのは

$$1 < k < 2$$

のときである。ここで、直線 $y=-x+k$ と放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標は、 x についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} -x+k &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x &= k \end{aligned}$$

の解である。この方程式の解のうち $0 < x < 1$ の範囲に存在するものの値が p であるから、 p は

$$0 < p < 1 \text{ かつ } p^2 + p = k$$

を満たす。ここで、 $y=x^2, y=-x+k, x=1$ で囲まれた図形の面積を S_4 とおくと

$$\begin{aligned} S_4 &= \int_p^1 \{x^2 - (-x+k)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - kx \right]_p^1 \\ &= -\frac{1}{3} p^3 - \frac{1}{2} p^2 + kp - k + \frac{5}{6} \\ &= -\frac{1}{3} p^3 - \frac{1}{2} p^2 + (p^2 + p)p - (p^2 + p) + \frac{5}{6} \\ &= \frac{2}{3} p^3 - \frac{1}{2} p^2 - p + \frac{5}{6} \end{aligned}$$

であり、直線 $y=-x+k$ が図形 S を面積の等しい 2 つの部分に分けると

$$\begin{aligned} S_1 &= 2S_4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} &= 2 \left(\frac{2}{3} p^3 - \frac{1}{2} p^2 - p + \frac{5}{6} \right) \\ \Leftrightarrow 4p^3 - 3p^2 - 6p + 4 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、 $f(p) = 4p^3 - 3p^2 - 6p + 4$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(p) &= 12p^2 - 6p - 6 \\ &= 6(2p+1)(p-1) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < p < 1$ において $f(p)$ は連続関数かつ $f'(p) < 0$ より単調減少関数である。ここで

$$\begin{aligned} f(0.6) &= 0.184 > 0 \\ f(0.7) &= -0.298 < 0 \end{aligned}$$

であるから、中間値の定理より①を満たす p の値は $0.6 < p < 0.7$ に存在する。よって、 p の小数第 1 位の数値は 6 である。

【3】

【解答】

(1) ア $\sqrt{2}$ イ $-\sqrt{3}$

(2) ウ -1 エ 1 オ 3 カ 2

【解説】

(1)

$$x^3 - 3x = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \text{ より}$$

$$-\sqrt{3} \leq x \leq 0, \sqrt{3} \leq x \text{ のとき } x^3 - 3x \geq 0$$

$$x < -\sqrt{3}, 0 < x < \sqrt{3} \text{ のとき } x^3 - 3x < 0$$

となる。

[1] $-\sqrt{3} \leq x \leq 0, \sqrt{3} \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^3 - 3x| + 3x \\ &= x^3 \end{aligned}$$

であるから

$$f'(x) = 3x^2$$

となる。これより、この範囲において極値は存在しない。

[2] $x < -\sqrt{3}, 0 < x < \sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^3 - 3x| + 3x \\ &= -x^3 + 6x \end{aligned}$$

であるから

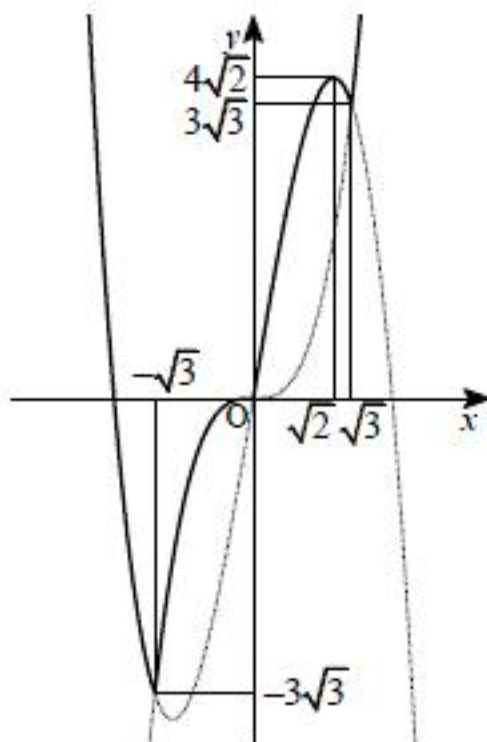
$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 6 \\ &= -3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

となる。これより、この範囲において $x = \sqrt{2}$ で極大値をとる。

以上、[1]、[2]より、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	+	+	0	+	0	-	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$

よって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



以上より、関数 $f(x)$ は $x = \sqrt{2}$ で極大となり、 $x = -\sqrt{3}$ で最小となる。

(2)

$-\sqrt{3} < x < 0$ において $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ であるから、 $y = f(x)$ のグラフ上の点

$(a, f(a))$ ($-\sqrt{3} < a < 0$) における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ \Leftrightarrow y &= 3a^2x - 2a^3 \end{aligned}$$

となる。また、 $0 < x < \sqrt{3}$ において $f(x) = -x^3 + 6x$, $f'(x) = -3x^2 + 6$ であるから、 $y = f(x)$ のグ

ラフ上の点 $(b, f(b))$ ($0 < b < \sqrt{3}$) における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(b)(x - b) + f(b) \\ \Leftrightarrow y &= (-3b^2 + 6)x + 2b^3 \end{aligned}$$

となる。この2本の接線が一致するとき

$$3a^2 = -3b^2 + 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-2a^3 = 2b^3 \quad \dots \textcircled{2}$$

が同時に成り立つ。②より

$$-2a^3 = 2b^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b) \left\{ \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -a$$

となるから、①より

$$3a^2 = -3(-a)^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a = -1 \left(\because -\sqrt{3} < a < 0 \right)$$

である。このとき、 $b = 1$ となるが、これは $0 < b < \sqrt{3}$ を満たす。以上より、 $(a, b) = (-1, 1)$ であり、求める接線の方程式は

$$y = 3x + 2$$

となる。

〔4〕

〔解答〕

- (1) ア 100
(2) イ 1330
(3) ウ 19900
(4) エ 1131
(5) オ 3204

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+17+19 &= \sum_{k=1}^{10} (2k-1) \\&= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10 \\&= 100\end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+\cdots+17^2+19^2 &= \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 \\&= \sum_{k=1}^{10} (4k^2-4k+1) \\&= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 10 \\&= 1330\end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}1^3+3^3+5^3+\cdots+17^3+19^3 &= \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^3 \\&= \sum_{k=1}^{10} (8k^3-12k^2+6k-1) \\&= 8 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 - 12 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 6 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10 \\&= 19900\end{aligned}$$

である。

(4)

$$\begin{aligned}1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + 17 \cdot 19 &= \sum_{k=1}^9 (2k-1)(2k+1) \\&= \sum_{k=1}^9 (4k^2-1) \\&= 4 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} - 9 \\&= 1131\end{aligned}$$

である。

(5)

$$\begin{aligned}&1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + \cdots + 15 \cdot 19 \\&= \frac{1}{2} \left\{ (1+3+5+\cdots+17+19)^2 - (1^2+3^2+5^2+\cdots+17^2+19^2) - 2(1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + 17 \cdot 19) \right\} \\&= \frac{100^2 - 1330 - 2 \cdot 1131}{2} \\&= 3204\end{aligned}$$

である。

【5】

【解答】

$$(1) \quad \text{ア} \quad \frac{2}{5} \qquad \text{イ} \quad \frac{3}{5}$$

$$(2) \quad \text{ウ} \quad \frac{3}{5}$$

$$(3) \quad \text{エ} \quad \frac{25}{6}$$

$$(4) \quad \text{オ} \quad \frac{25}{4}$$

【解説】

BC=CDであり、円周角一定の定理より、同一円周上の等しい長さの弧に対する円周角は等しいから

$$\angle BAC = \angle CAD$$

となり、線分 AC は $\angle BAD$ の二等分線となる。点 P は線分 AC 上の点であるから、 $\triangle ABD$ の角の二等分線の関係より

$$\begin{aligned} BP : PD &= AB : AD \\ &= 3 : 2 \end{aligned}$$

となるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$$

である。

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}| &= \sqrt{\left|\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right|^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{25}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{25}|\overrightarrow{AD}|^2} \end{aligned}$$

である。 $|\overrightarrow{AB}|=3$ 、 $|\overrightarrow{AD}|=2$ 、 $\angle BAD=30^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos \angle BAD \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}| &= \sqrt{\frac{4}{25} \cdot 3^2 + \frac{12}{25} \cdot 3\sqrt{3} + \frac{9}{25} \cdot 2^2} \\ &= \frac{3}{5}\sqrt{8+4\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{5}\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3}{5}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

である。

(3)

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AP}$ とするとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ &= k\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2k-5}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3k}{5}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \\ &= k\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{2k}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3k-5}{5}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

となり、これより

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= \left(\frac{2k-5}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2 \cdot \frac{2k-5}{5} \cdot \frac{3k}{5} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left(\frac{3k}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AD}|^2 \\ |\overrightarrow{DC}|^2 &= \left(\frac{2k}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2 \cdot \frac{2k}{5} \cdot \frac{3k-5}{5} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left(\frac{3k-5}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AD}|^2 \end{aligned}$$

となる。BC=CDであるから $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{DC}|^2$ となり

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2k-5}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2 \cdot \frac{2k-5}{5} \cdot \frac{3k}{5} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left(\frac{3k}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AD}|^2 \\ &= \left(\frac{2k}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2 \cdot \frac{2k}{5} \cdot \frac{3k-5}{5} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left(\frac{3k-5}{5}\right)^2 |\overrightarrow{AD}|^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{-4k+5}{5} |\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{2k}{5} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{6k-5}{5} |\overrightarrow{AD}|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (-4k+5) \cdot 3^2 - 2k \cdot 3\sqrt{3} + (6k-5) \cdot 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6(2+\sqrt{3})k = 25 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{25}{6}(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

である。

(4)

$\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ の底辺を BD と見ると、底辺は共通であり、高さの比は AP:PC であるから、面積比も AP:PC となる。 $\triangle ABD$ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であり、四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} S + \frac{PC}{AP} S &= S + (k-1)S \\ &= kS \\ &= \frac{25}{6}(2-\sqrt{3}) \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{25}{4}(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

〔6〕

〔解答〕

- (1) ア -1 イ $-\frac{3}{4}$
(2) ウ 2 エ 2
(3) オ $7+2\sqrt{11}$ カ $\sqrt{11}$

〔解説〕

(1)

3 次方程式 $x^3+ax+b=0$ が解として $1, \cos\alpha, \cos\beta$ をもつとき、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} 1+\cos\alpha+\cos\beta &= 0 && \cdots \textcircled{1} \\ \cos\alpha+\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta &= a && \cdots \textcircled{2} \\ \cos\alpha\cos\beta &= -b && \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。①、②より

$$\begin{aligned} \cos\alpha+\cos\beta &= -1 && \cdots \textcircled{4} \\ \cos\alpha\cos\beta &= a+1 \end{aligned}$$

となるから、解と係数の関係より $\cos\alpha, \cos\beta$ を解にもつ 2 次方程式は $x^2+x+a+1=0$ である。
このとき、 $-1 \leq \cos\alpha, \cos\beta \leq 1$ であるから、2 次方程式 $x^2+x+a+1=0$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲
に 2 つの実数解をもつ。ここで、 $f(x)=x^2+x+a+1$ とおくと

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}$$

であり、方程式 $x^2+x+a+1=0$ の解は $y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標にあたることより、
方程式 $x^2+x+a+1=0$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に 2 つの実数解をもつ条件は

$$\begin{aligned} f(-1) &\geq 0 && \cdots \textcircled{5} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &\leq 0 && \cdots \textcircled{6} \\ f(1) &\geq 0 && \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

が同時に成り立つことであり、⑤より

$$\begin{aligned} a+1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a &\geq -1 \end{aligned}$$

となり、⑥より

$$\begin{aligned} a+\frac{3}{4} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a &\leq -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

となり、⑦より

$$\begin{aligned} a+3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a &\geq -3 \end{aligned}$$

となるから、求める条件は

$$-1 \leq a \leq -\frac{3}{4}$$

である。

(2)

$\cos(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta)$ を解にもつ 2 次方程式を $x^2+Ax+B=0$ とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= -A \\ \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) &= B \end{aligned}$$

となる。ここで、③、④より

$$\begin{aligned} A &= -\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \\ &= -2\cos\alpha\cos\beta \\ &= -2\cdot(-b) \\ &= 2b \\ B &= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta) \\ &= \cos^2\alpha+\cos^2\beta-1 \\ &= (\cos\alpha+\cos\beta)^2-2\cos\alpha\cos\beta-1 \\ &= (-1)^2-2\cdot(-b)-1 \\ &= 2b \end{aligned}$$

であるから、求める 2 次方程式は

$$x^2+2bx+2b=0$$

となる。

(3)

$\sin\alpha, \sin\beta$ を解にもつ 2 次方程式を $x^2+cx+d=0$ と表すとき、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \sin\alpha+\sin\beta &= -c && \cdots \textcircled{8} \\ \sin\alpha\sin\beta &= d && \cdots \textcircled{9} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\} \quad \cdots \textcircled{10}$$

であり、(2)の結果より $b=-\frac{1}{5}$ のとき、 $\cos(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta)$ を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}=0$$

となり、この 2 解は $x=\frac{1\pm\sqrt{11}}{5}$ であるから、これらはそれぞれ $\cos(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta)$ のいず
れかの値となる。 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ のとき $\sin\alpha \geq 0, \sin\beta \geq 0$ であるから、 $\sin\alpha\sin\beta \geq$
 0 であり、⑩より

$$\begin{aligned} \sin\alpha\sin\beta &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{11}}{5}-\frac{1-\sqrt{11}}{5}\right)\right| \\ &= \frac{\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$

となる。よって、⑨より

$$d = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

である。さらに、⑧より

$$\begin{aligned} c^2 &= (\sin\alpha+\sin\beta)^2 \\ &= \sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta \\ &= 2-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+2\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

であり、(2)の B の計算より

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha+\cos^2\beta &= 2b+1 \\ &= 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+1 \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} c^2 &= 2-\frac{3}{5}+2\cdot\frac{\sqrt{11}}{5} \\ &= \frac{7+2\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$

となる。