1

〔解答〕

ア	2	イ	1	ウ	−	エ	1	オ	1
カ	6	キ	7	ク	1	ケ	2	コ	3
サ	2	シ	−	ス	3	セ	1	ソ	7
タ	1	チ	6	ツ	1	テ	6	ト	9
ナ	4	ニ	3	ヌ	3	ネ	8	ノ	1
ハ	2								

〔解説〕

(1)

百の位，十の位．一の位の数をそれぞれ x, y, z とする。このとき，条件より

$$x+y+z=6,\ x>0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

を満たす (x, y, z) の個数を求めればよい。これは，6 個の1と2 個の仕切りを一緒に並べた並べ方から(左側の領域の1の個数を x，仕切りにはさまれた1の個数を y，右側の領域の1の個数を z とみなす)，左端が仕切りにならない場合を除いたときに等しいから，求める個数は

$${}_7C_2=21 \ (\text{個})$$

である。

(2)

$\alpha=\dfrac{4}{1-i}$ とすると

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{4}{1-i}\\&=2+2i\end{aligned}$$

である。2 次方程式のもう1つの解 β は α と共役より

$$\beta=2-2i$$

である。これより

$$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=8\end{cases} \qquad ・・・①$$

がわかる。一方，与式は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}&=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha\beta)^3}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}\end{aligned}$$

と変形できるから，①を代入して

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{-1}{16}$$

が得られる。

(3)

△ ABC における余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle B&=\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2AB\cdot BC}\\&=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}\\&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

となる。一方

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)&=\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)\\&=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

である。従って

$$\angle B=\frac{7}{12}\pi$$

とわかる。

(4)

放物線 $y=x^2+2x+1$ は

$$\begin{aligned}y&=x^2+2x+1\\&=(x+1)^2\end{aligned}$$

より，頂点 $A(-1, 0)$ を持つ。また，放物線 $y=x^2-2x+2$ は

$$\begin{aligned}y&=x^2-2x+2\\&=(x-1)^2+1\end{aligned}$$

より，頂点 $B(1, 1)$ を持つ。また，2 つの放物線の交点の x 座標は

$$x^2+2x+1=x^2-2x+2$$
$$\therefore x=\frac{1}{4}$$

より，交点 C は $C\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{25}{16}\right)$ である。求める放物線を

$$y=ax^2+bx+c$$

として，点 A, B, C の座標を代入すると

$$\begin{cases}a-b+c=0\\ a+b+c=1\\ \dfrac{1}{16}a+\dfrac{1}{4}b+c=\dfrac{25}{16}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=\dfrac{1}{2}\\ c=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

を得る。従って，y 軸との交点の座標は $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ である。

(5)

3 次関数の方程式は

$$\begin{aligned}&y=(1+t)x^3+2(a-3t)x^2+\left(a^2+8t\right)x\\ \Leftrightarrow\ &\left(x^3-6x^2+8x\right)t+\left(x^3+2ax^2+a^2x-y\right)=0\end{aligned}$$

と変形できる。t の値によらず常に成り立つとき

$$\begin{cases}x^3-6x^2+8x=0\\ x^3+2ax^2+a^2x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-2)(x-4)=0\\ y=x^3+2ax^2+a^2x\end{cases}$$

を満たす。従って，3 定点 A, B, C は $(0, 0), \left(2, 2a^2+8a+8\right), \left(4, 4a^2+32a+64\right)$ である。3 定点

を通る直線を $y=kx$ として，$\left(2, 2a^2+8a+8\right), \left(4, 4a^2+32a+64\right)$ を代入すると

$$\begin{cases}2a^2+8a+8=2k\\ 4a^2+32a+64=4k\end{cases}$$

を得る。この条件から

$$a=-3$$

とわかる。

(6)

点 ABC を通る平面を

$$x+ay+bz=c$$

として，点 A, B, C の座標を代入すると

$$\begin{cases}6+6a+8b=c\\ 3+15a+2b=c\\ -1+9a+12b=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=20\end{cases}$$

とわかる。ここで点 P の x 座標を t とする。点 P は xy 平面上にあるから z 座標の値は 0 であり，y 座標は平面 ABC の式より $y=20-t$ である。従って，線分 PD の長さは

$$\begin{aligned}PD&=\sqrt{(t-11)^2+(20-t-5)^2+3^2}\\&=\sqrt{2t^2-52t+355}\\&=\sqrt{2(t-13)^2+17}\end{aligned}$$

となる。これより，線分 PD の長さの最小値は $t=13$ のとき $\sqrt{17}$ である。

(7)

問題文より

$$\begin{aligned}E+J&=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。ここで，$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$ は $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させる回転行列より

$$\begin{aligned}(E+J)^9&=2^{\frac{9}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{9\pi}{4}&-\sin\frac{9\pi}{4}\\ \sin\frac{9\pi}{4}&\cos\frac{9\pi}{4}\end{pmatrix}\\&=2^{\frac{9}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\\&=16\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\\&=16(E+J)\\&=16E+16J\end{aligned}$$

を得る。

(8)

根号内の条件と真数条件より

$$x^2-2\geqq 0$$

かつ

$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2}>0\\ x-\sqrt{x^2-2}>0\end{cases}$$

を満たす。これより

$$x\geqq\sqrt{2} \qquad ・・・①$$

である。また，与式は

$$\begin{aligned}&\log_2\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)-\log_2\left(x-\sqrt{x^2-2}\right)=3\\ \Leftrightarrow\ &\log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}}\right)=\log_2 2^3\end{aligned}$$

と変形できる。これより

$$\begin{aligned}&\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}}=8\\ \Leftrightarrow\ &7x=9\sqrt{x^2-2}\end{aligned}$$

となる両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned}&49x^2=81x^2-162\\ \Leftrightarrow\ &32x^2=162\\ \therefore\ &x^2=\frac{81}{16}\end{aligned}$$

を得る。ここで①より

$$x=\frac{9}{4}$$

となる。

(9)

x, y を t で微分すると

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{(t+1)^2}\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2(t+1)}{\left(t^2+2t+2\right)^2}\end{cases}$$

であるから，$\dfrac{dy}{dx}$ は

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\\&=-\frac{2(t+1)^3}{\left(t^2+2t+2\right)^2}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$f(t)=-\frac{2(t+1)^3}{\left(t^2+2t+2\right)^2}$$

とすると

$$f'(t)=\frac{2(t+1)^2\left(t^2+2t-2\right)}{\left\{(t+1)^2+1\right\}^3}$$

である。ここで

$$f(t)=-\frac{2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{t^{\frac{4}{3}}}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}\right)^2}$$

より

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=0$$
$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$$

である。以上より増減表を書くと下のようになる。

t	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$f'(t)$		+	0	−	0	+	
$f(t)$	0	↗		↘		↗	0

従って，C の接線の傾きの最大値は

$$f\left(-1-\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

である。

(10)

$x=\tan\theta$ と変数変換すると

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

となるから

$$\begin{aligned}\alpha&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin\theta)-\log(1-\sin\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\\&=\log\left(1+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

である。従って

$$\begin{aligned}e^{\alpha}&=e^{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}\\&=1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{2}$

〔解答〕

$\boxed{\text{ヒ}}$ $\dfrac{1}{3}\left(b^2+c^2\right)$

〔解説〕

直角三角形ABCは∠Aが直角より

$$\mathrm{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

である。ここで，$1\leqq k\leqq n$を満たす整数kを用いて

$$\mathrm{BD}_k=\frac{k}{n+1}\sqrt{b^2+c^2}$$

と表せる。これより，$\triangle\mathrm{BD}_k\mathrm{A}$について余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}_k{}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}_k{}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}_k\cdot\cos\angle\mathrm{B}\\&=c^2+\frac{k^2}{(n+1)^2}\left(b^2+c^2\right)-2\cdot c\cdot\frac{k}{n+1}\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\\&=\left(b^2+c^2\right)\frac{k^2}{(n+1)^2}-2c^2\frac{k}{n+1}+c^2\end{aligned}$$

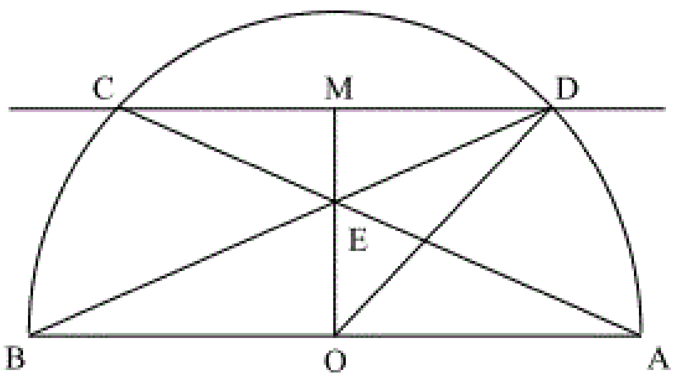
となる。従って，区分求積法を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\mathrm{AD}_1\right)^2+\left(\mathrm{AD}_2\right)^2+\cdots+\left(\mathrm{AD}_n\right)^2\right\}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{AD}_k\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left(b^2+c^2\right)\frac{(k+1)^2}{(n+1)^2}-2c^2\frac{k+1}{n+1}+c^2\right\}\\&=\int_0^1\left\{\left(b^2+c^2\right)x^2-2c^2x+c^2\right\}dx\\&=\frac{1}{3}\left(b^2+c^2\right)\end{aligned}$$

とわかる。

$\boxed{3}$

(1)



半円の中心をOとする。△OMD に注目すると

$$\begin{aligned}OM &= \sqrt{OD^2 - DM^2}\\ &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

が得られる。

(答) $OM = \sqrt{1-x^2}$

(2)

△CME ∽ △AOEより

$$\frac{ME}{OE} = \frac{CM}{OA}$$
$$\Leftrightarrow \frac{ME}{OE} = x$$

である。従って

$$\frac{ME}{MO} = \frac{x}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow ME = \frac{x}{x+1}\cdot MO$$
$$\therefore h = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$$

となる。

(答) $h = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$

(3)

△CDEの面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}CD\cdot ME\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}\\ &= \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{1+x}\end{aligned}$$

と表せる。ここで $S = S(x)$ として，x で微分すると

$$\begin{aligned}S'(x) &= \frac{x\left(-2x^2-x+2\right)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{-x\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

となる。$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $S(x)$ の増減表を書くと下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{17}-1}{4}$	$\cdots$	1
$S'(x)$	0	+	0	−	
$S(x)$	0	↗		↘	0

以上より，S を最大にする x は

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

である。

(答) $x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$