1.

〔解答〕

(1) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (2) $4\sqrt{3}-6$ (3) $a=b=0$

(4) $6\sqrt{6}$ (5) 400 円

〔解説〕

(1)

解の公式より

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{1\cdot2}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

を得る。

(2)

分母分子に $\left(\sqrt{3}-1\right)$ をかけて

$$\frac{6-\sqrt{12}}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2}$$
$$=4\sqrt{3}-6$$

となる。

(3)

$a=b=0$ のとき，a, b は共に整数で $(a-1)(b-1)=1$ を満たすが，$a=b=2$ ではないから偽である。

(4)

求める三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot18$$
$$=6\sqrt{6}$$

とわかる。

(5)

求める期待値は

$$10000\cdot\frac{1}{50}+5000\cdot\frac{2}{50}+0\cdot\frac{47}{50}=400 \quad (円)$$

である。

2.

〔解答〕

①	$(x+z)(x+y-z)$	②	4	③	-1	④	$4\sqrt{7}$
⑤	6	⑥	48	⑦	13	⑧	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
⑨	$\dfrac{7}{16}$	⑩	$\dfrac{9}{16}$	⑪	$4p-5$	⑫	2210

〔解説〕

(1)

与式を因数分解すると

$$\begin{aligned} y(x+z)+(x^2-z^2) &= y(x+z)+(x+z)(x-z) \\ &= (x+z)(x+y-z) \end{aligned}$$

となる。

(2)

条件より $M+2\sqrt{3}>0$ である。従って，不等式は

$$-M-2\sqrt{3}<2M+1<M+2\sqrt{3}$$

である。左辺と中辺より

$$\begin{aligned} &-M-2\sqrt{3}<2M+1 \\ &\Leftrightarrow 3M>-1-2\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow M>\frac{-1-2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

を得る。また，中辺と右辺より

$$\begin{aligned} &2M+1<M+2\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow M<2\sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

を得る。以上より

$$\frac{-1-2\sqrt{3}}{3}<M<2\sqrt{3}-1$$

となり，これを満たす整数は $M=-1, 0, 1, 2$ の 4 個である。

(3)

条件より $a+b=\sqrt{3},\ a-b=\sqrt{7}$ より

$$\begin{aligned} &(a+b)^2-(a-b)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 4ab=-4 \\ &\therefore ab=-1 \end{aligned}$$

が得られる。また，

$$\begin{aligned} a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ &= (a-b)\left\{(a+b)^2-ab\right\} \\ &= \sqrt{7}(3+1) \\ &= 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$y=a(x+b)^2+c$ に 3 点の座標を代入すると

$$\begin{cases} 0=a(b-3)^2+c \\ 0=a(b+1)^2+c \\ 6=ab^2+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=8 \end{cases}$$

とわかる。従って，$a+c=6$ である。

(5)

3 桁の整数は百の位に 0 が使えないことを考えて，

$$4\cdot 4\cdot 3=48 \ \text{(通り)}$$

である。また，3 の倍数となるカードの組合せは $(0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)$ である。

これらが 2 の倍数になる並び方を考えると

$$3+4+2+4=13 \ \text{(通り)}$$

である。

(6)

与式より

$$\begin{aligned} &\sin^2\theta-\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos 2\theta=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで $0^\circ \leqq 2\theta \leqq 360^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} &2\theta=120^\circ, 240^\circ \\ &\theta=60^\circ, 120^\circ \end{aligned}$$

となる。従って $\sin\theta=\sin 60^\circ=\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

(7)

すべて同色となる確率は，白球もしくは赤球を連続 3 回取り出すときより

$$\left(\frac{3}{12}\right)^3+\left(\frac{9}{12}\right)^3=\frac{7}{16}$$

である。この余事象は異なる色の玉が出ることであるから，その確率は

$$1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$$

である。

(8)

与式より

$$\sum_{k=8}^{19}(k-7)(4k-33)=\sum_{k=8}^{19}(k-7)\{4(k-7)-5\}$$

と変形できる。ここで $p=k-7$ とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{k=8}^{19}(k-7)\{4(k-7)-5\} &= \sum_{p=1}^{12}p(4p-5) \\ &= 4\sum_{p=1}^{12}p^2-5\sum_{p=1}^{12}p \\ &= 4\cdot\frac{12(12+1)(2\cdot 12+1)}{6}-5\cdot\frac{12(12+1)}{2} \\ &= 2210 \end{aligned}$$

となる。

3.

(1)

$\triangle ABC$について余弦定理を用いて

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$$
$$\therefore \cos\angle A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

とわかる。また，$\triangle AB_1C_1$について余弦定理を用いると

$$(a_1)^2=\left(\frac{1}{3}c\right)^2+\left(\frac{2}{3}b\right)^2-2\cdot\frac{c}{3}\cdot\frac{2b}{3}\cdot\cos\angle A$$
$$=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{9}$$

とわかる。

(答) $\cos\angle A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, (a_1)^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{9}$

(2)

(1)と同様にして

$$(b_1)^2=\frac{-a^2+2b^2+2c^2}{9}$$
$$(c_1)^2=\frac{2a^2-b^2+2c^2}{9}$$

を得る。従って

$$(a_1)^2+(b_1)^2+(c_1)^2=\frac{(2+2-1)a^2+(2+2-1)b^2+(2+2-1)c^2}{9}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

である。

(答) $(a_1)^2+(b_1)^2+(c_1)^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

(3)

(2)と同様にして$(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2=\dfrac{(a_1)^2+(b_1)^2+(c_1)^2}{3}$となり，以下同様に2以上の整数$n$を用いて

$$(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2=\frac{(a_{n-1})^2+(b_{n-1})^2+(c_{n-1})^2}{3}$$

が成立する。従って

$$\sum_{k=1}^{5}\left\{(a_k)^2+(b_k)^2+(c_k)^2\right\}=(11+17+26)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}\right)$$
$$=\frac{242}{9}$$

となる。

(答) $\dfrac{242}{9}$