

1

【解答】

アー	イ 5	ウ 4	エー	オ 3	カ 1
キ 3	ク 2	ケ 0	コ 1	サ 2	シ 0
スー	セ 4	ソ 8	タ 3	チ 2	ツ 0
テ 2	ト 2	ナ 3	ニー	ヌ 9	ネ 8
ノ b	ハ 1	ヒ 1	フ 7	ヘ 3	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= -(1 - \cos^2 x) + \cos x \\&= \cos^2 x + \cos x - 1 \\&= \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

となる。ここで $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、 $f(x)$ は $\cos x = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$ を取る。

(2)

2つの放物線の方程式を連立すると

$$\begin{aligned}x^2 + x + 2 &= -x^2 + ax \\ \Leftrightarrow 2x^2 - (a-1)x + 2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。2つの放物線が異なる2点で交わる時、2次方程式①の判別式が正であるから

$$\begin{aligned}(a-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 &= a^2 - 2a - 15 \\&= (a-5)(a+3) > 0 \\ \Leftrightarrow a < -3, a > 5 \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。また、2つの放物線の交点が第2象限にあるとき、①の方程式の2解が負である。よって①の2解を α, β とすると、

$$\alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

となる。解と係数の関係より

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a-1}{2} &< 0 \\ \Leftrightarrow a &< 1 \quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となり、同様にして

$$\begin{aligned}\alpha\beta &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 &> 0\end{aligned}$$

となるが、これは常に満たされる。ここで

$$\begin{aligned}y &= x^2 + x + 2 \\&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\end{aligned}$$

となるので、2つの放物線の交点の x 座標が負の時、それら2つの交点は第2象限にある。よって②、③より求める条件は

$$a < -3$$

となる。

(3)

求める確率を、余事象の確率を用いて考える。全事象は

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

である。ここで3個の玉を取り出すとき、色が一種類である確率は

$$\frac{{}_3C_3 + {}_3C_3 + {}_4C_3}{120} = \frac{1+1+4}{120} = \frac{1}{20}$$

となり、色が三種類である確率は

$$\frac{{}_3C_1 {}_3C_1 {}_4C_1}{120} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{120} = \frac{3}{10}$$

となる。よって求める確率は、これらの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{20} - \frac{3}{10} = \frac{13}{20}$$

となる。

(4)



点Aは、直線 $y = \frac{p}{q}x + \frac{p}{r}$ と y 軸との交点であるから、その座標は $\left(0, \frac{p}{r}\right)$ である。同様にして

Bの座標は $\left(0, \frac{q}{r}\right)$ となる。仮定よりAB間の距離は1であるから、 $0 < r, p < q$ に気を付ける

と

$$\begin{aligned}\frac{q}{r} - \frac{p}{r} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{q-p}{r} &= 1\end{aligned}$$

となる。次に点Cは二直線の交点であるから、Cの x 座標はこれらの方程式を連立して

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}x + \frac{p}{r} &= -\frac{p}{q}x + \frac{q}{r} \\ \Leftrightarrow \frac{2p}{q}x &= \frac{q-p}{r}\end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{q}{2p} \left(\because \frac{q-p}{r} = 1, p > 0 \right)$$

となる。ここで△ABCの面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{q}{2p} = \frac{q}{4p}$$

となるが、仮定よりこれが5に等しいので

$$\begin{aligned}\frac{q}{4p} &= 5 \\ \therefore \frac{p}{q} &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

となる。

(5)

$$2^{2x} + 2^{2x+2} - 2^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 8 = 0$$

$$\therefore 2^x = -2 + \sqrt{2^2 + 8} \quad (\because 2^x > 0)$$

$$= -2 + 2\sqrt{3}$$

となるから

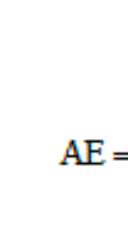
$$2^{2x} + 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 2^2 = 2^x (2^{2x} + 2^{x+2} - 2^3) + 4 \cdot 2^x + 4$$

$$= 4(-2 + 2\sqrt{3}) + 4$$

$$= -4 + 8\sqrt{3}$$

を得る。

(6)



AE = BE であるから、 $\angle A = \angle DBE$ 。また、円周角の定理より $\angle DBE = \angle DCE$ となる。ここで

$$\angle A = \angle DBE = \angle DCE = \alpha$$

とおく。同様にして $BC = BD$ から $\angle BCD = \angle BDC$ 。円周角の定理より $\angle BDC = \angle BEC$ となる。

ここで

$$\angle BCD = \angle BDC = \angle BEC = \beta$$

とおく。また、弧CEは弧BCの二倍の長さであるから

$$\begin{aligned}\angle EBC &= 2\angle BEC \\&= 2\beta\end{aligned}$$

となる。ここで△ABCについて

$$\begin{aligned}\angle A + \angle ABC + \angle ACB &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \alpha + \alpha + 2\beta + \alpha + \beta &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= 60^\circ \quad \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。同様に△EBCについて

$$\begin{aligned}\angle BEC + \angle EBC + \angle BCE &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \beta + 2\beta + \alpha + \beta &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \alpha + 4\beta &= 180^\circ \quad \cdots \textcircled{5}\end{aligned}$$

となる。よって④、⑤をといて

$$(a, \beta) = (20^\circ, 40^\circ)$$

を得る。以上より、 $\angle A = 20^\circ$ である。

(7)

楕円の方程式を $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 (p, q > 0)$ とおく。この楕円が $(0, \pm a)$ を通るので

$$a^2 = q^2$$

$$\Leftrightarrow q = a \quad (\because a > 0, q > 0)$$

となる。また、楕円の焦点が $(\pm a, 0)$ であるから、

$$\sqrt{p^2 - q^2} = a$$

$$\Leftrightarrow p = \sqrt{2}a$$

となる。よって楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

となる。この楕円と直線 $x = a$ が第一象限で交わる点Aであるから、その座標は

$$\frac{a^2}{2a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore A \left(a, \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

となる。ここで

$$PQ = 2a$$

$$AQ = \sqrt{(a+a)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

であるから

$$\cos \theta = \frac{PQ}{AQ}$$

$$= \frac{2a}{\frac{3a}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

を得る。

(8)

点 (p, q) を $y = -x$ に関して対称移動させると $(-q, -p)$ に移動するので、この移動を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ とおくと

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(2) & f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \\ f(2) = -1 \\ f(3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ A + B + C = -1 \\ 4A + 2B + C = -1 \\ 9A + 3B + C = 0 \end{cases}$$

となる。これを解くと

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{8}$$

となる。

(9)



メネラウスの定理より

$$\frac{DO}{BD} \cdot \frac{EC}{OE} \cdot \frac{AB}{CA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{EC}{OE} \cdot 5 = 1$$

$$\Leftrightarrow OE : EC = 5 : 6$$

を得る。ここで点Cは辺ABを1:4に内分する点であるから、その座標は $\left(\frac{4a+b}{5}, \frac{b}{5}\right)$ である。

前述のとおり $OE : EC = 5 : 6$ であるから、Eの座標は

$$\left(\frac{4a+b}{5} \cdot \frac{5}{5+6} + \frac{b}{5} \cdot \frac{5}{5+6} \right) = \left(\frac{4a+b}{11}, \frac{b}{11} \right)$$

を得る。

(10)

与式より

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{2}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n}$$

$$= \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n+1}$$

$$= \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = \frac{7}{3} - \frac{2}{n}$$

となる。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{n} \right)$$

$$= \frac{7}{3}$$

を得る。

2

(1)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ から}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{8x^2 - 2x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

となる。 $f''(x) = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

であり、この前後で $f''(x)$ の符号が変化するため、変曲点の x 座標は

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。A の x 座標は正なので、求める座標は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4} \right)$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &= f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$$

(3)

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ であるから求める体積は}$$

$$\begin{aligned} \pi \int_0^a \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8} \right)^2 dx &= \frac{\pi}{64} \int_0^a (27x^2 - 54\sqrt{3}x + 81) dx \\ &= \frac{\pi}{64} \left[9x^3 - 27\sqrt{3}x^2 + 81x \right]_0^a \\ &= \frac{19\sqrt{3}}{64} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{19\sqrt{3}}{64} \pi$$

(4)

$y = f(x)$, $x = a$, x 軸, y 軸によって囲まれる図形を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで $x = \tan \theta$ とおくと

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

となり

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

となるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{(1+\tan^2 \theta)^2 \cos^2 \theta} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{8} \end{aligned}$$

を得る。ここで(1)より、 $0 < x < a$ において $y = f(x)$ は上に凸のグラフであるから、この範囲で $y = g(x)$ は $y = f(x)$ の上側にある。よって求める体積は、(3)で求めた体積から V を引いたものであり

$$\begin{aligned} \frac{19\sqrt{3}}{64} \pi - V &= \frac{19\sqrt{3}}{64} \pi - \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{8} \right) \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{64} \pi - \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{11\sqrt{3}}{64} \pi - \frac{\pi^2}{12}$$