

1.

〔解答〕

- (1) $-1 < x < 3$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (3) $-1 \pm \sqrt{3}$
- (4) ② (5) 4 (6) $\frac{41}{36}$

〔解説〕

(1)

不等式を変形すると

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x+1) &< 0 \end{aligned}$$

より $-1 < x < 3$ である。

(2)

与式は

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{(2\sqrt{6}-\sqrt{6})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} &= \frac{1}{4}(\sqrt{30} + \sqrt{6} - \sqrt{30} + \sqrt{6}) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3)

等差数列なので

$$2a + a^2 = 2 \cdot 1$$

である。これを解くと

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(4)

l, m を $l > m$ を満たす自然数とすると $a = 3l, b = 3m$ と書ける。ここで $a^2 - b^2 = 9(l^2 - m^2) > 0$ より、これは3で割り切れる自然数となっている。従って十分条件であることがわかる。しかし $a = 4, b = 1$ のとき $a^2 - b^2 = 15$ より $(a^2 - b^2) \in A$ であるが $a \notin A$ より必要条件ではない。以上より②である。

(5)

$\angle BCP + \angle AQP = 180^\circ$ かつ $\angle BCP = 180^\circ - \angle ACB$ より $\angle ACB = \angle AQP$ で、 $\angle BAC$ は共通なので $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ である。従って $BC:PQ = AB:AP$ である。いま、 $BC:PQ = 1:2$ かつ $AB = 2$ より $AP = 4$ となる。

(6)

問題文中の表を埋めると下表のようになる。

$\alpha \backslash \beta$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0
3	3	1	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	2	1	1	1	0
6	6	3	2	1	1	1

各マスの起きる確率はすべて等しく $\frac{1}{36}$ である。従って求める期待値は

$$1 \cdot \frac{12}{36} + 2 \cdot \frac{4}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{41}{36}$$

である。

2.

〔解答〕

- ① $(2y+1)(y-2)$ ② $(2x+y-2)(x+2y+1)$ ③ 30 ④ 1
⑤ 2 ⑥ $2\sqrt{3}$ ⑦ -1 ⑧ 2
⑨ $\frac{-1}{2}$ ⑩ $(a+1)^2$ ⑪ 65 ⑫ 71
⑬ 2145

〔解答〕

(1)

E を因数分解すると

$$\begin{aligned} E &= 2y^2 - 3y - 2 \\ &= (2y+1)(y-2) \end{aligned}$$

となる。 E を利用して F を因数分解すると

$$\begin{aligned} F &= 2x^2 + 5yx + (2y+1)(y-2) \\ &= (2x+y-2)(x+2y+1) \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\triangle ABC$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^2 &= 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cos \angle A \\ \Leftrightarrow \cos \angle A &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。ここで $0^\circ < A < 180^\circ$ より $\angle A = 30^\circ$ が得られる。また $\triangle ACH$ に注目して

$$CH = 2 \cdot \sin \angle A = 1$$

$$AH = 2 \cdot \cos \angle A = \sqrt{3}$$

である。また AM は $\angle A$ の 2 等分線なので $CM:MH = AC:AH = 2:\sqrt{3}$ となり

$$\begin{aligned} MH &= CH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$

である。

(3)

$f(a)$ が最大になり、 $f(a+1)$ が最小になるのは $a+1 \leq 0$ で $a \leq -1$ のときである。このとき、

$$\begin{aligned} L &= f(a) - f(a+1) \\ &= -2a - 1 \end{aligned}$$

である。また、 $0 \leq a$ のとき $f(a+1)$ が最大になり、 $f(a)$ が最小となり、このとき

$$\begin{aligned} L &= f(a+1) - f(a) \\ &= 2a + 1 \end{aligned}$$

である。また $f(a) = f(a+1)$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a+1) \\ \Leftrightarrow a^2 &= (a+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2a+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $-\frac{1}{2} < a < 0$ のとき最大値は $f(a+1)$ であるが最小値は $a=0$ のときで $f(0)$ なので

$$\begin{aligned} L &= f(a+1) - f(0) \\ &= (a+1)^2 \end{aligned}$$

である。

(4)

$r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_{65} &= 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + 65r^{64} \\ rS_{65} &= r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + 64r^{64} + 65r^{65} \\ S_{65} - rS_{65} &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{64} - 65r^{65} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{65} r^{k-1} \right) - 65r^{65} \end{aligned}$$

と求められる。 $r=2$ のとき

$$\begin{aligned} (1-2)S_{65} &= \left(\sum_{k=1}^{65} 2^{k-1} \right) - 65 \cdot 2^{65} \\ \Leftrightarrow -S_{65} &= \frac{1-2^{65}}{1-2} - 65 \cdot 2^{65} \\ \Leftrightarrow S_{65} &= 1 + 64 \cdot 2^{65} \end{aligned}$$

である。ここで $64 = 2^6$ より

$$S_{65} = 1 + 2^{71}$$

となる。 $r=1$ のとき

$$\begin{aligned} S_{65} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 65 \\ &= \frac{1}{2} 65 \cdot (65+1) \\ &= 65 \cdot 33 \\ &= 2145 \end{aligned}$$

である。

3.

(1)

$1 \leq x \leq 4$ より、 $x=4$ の時から順に考える。 $x=4$ だと $y=z=4$ となり、 $3x+2y+z \leq 12$ を満たさず不適。次に、 $x=3$ だと $3 \leq y \leq z \leq 4$ で $3 \cdot 3+2y+z \leq 12$ は $2y+z \leq 3$ となり明らかに上式を満たす y, z は存在しない。 $x=2$ のとき $2 \leq y \leq z \leq 4$ で $2y+z \leq 6$ より $y=x=2$ のときのみこれを満たす。従って x の最大値 $p=2$ である。

(答) $p=2$

(2)

黄玉4個が2個以上連続して並ばないようにするには

$$a+b \geq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となればよい。ここで(i)の不等式より

$$3a+2b+4 \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 3a+2b \leq 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。従って $a+b=3$ のとき

$$2a+2b+a=6+a \leq 8$$

なる a が存在し $a=1, b=2$ とすればよいが、 $a+b \geq 4$ とすると $2a+2b \geq 8$ で、 $a \geq 1$ より

$$3a+2b > 2a+2b \geq 8$$

となるので②を満たす a, b は存在しない。従って求める $a+b$ の値は3である。

(答) $a+b=3$

(3)

(1)より、 $x=p=2$ のとき、 $y=z=2$ のみ(i),(ii)をみたし、これらの並べ方は全部で6つの玉を並べるので

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90 \text{ (通り)}$$

である。ここから黄玉を1まとめにした場合の

$$\frac{5!}{2!2!!}=30 \text{ (通り)}$$

を引いて

$$90-30=60 \text{ (通り)} \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。

(答) 60通り

(4)

$y=2$ のとき、 $x=1$ または2である。(3)で $x=2$ のときを考えたので、 $x=1, y=2$ のときを考える。(i)の不等式はこのとき

$$3+4+z \leq 12$$

$$\Leftrightarrow z \leq 5$$

となり、(ii)より $2 \leq z \leq 4$ である。

[1] $z=2$ のとき

5つの玉すべての並べ方は

$$\frac{5!}{1!2!2!}=30 \text{ (通り)}$$

である。ここから黄玉を1まとめにした

$$\frac{4!}{1!2!!}=12 \text{ (通り)}$$

を引いて

$$30-12=18 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] $z=3$ のとき

黄玉以外の3つの並べ方は

$$\frac{3!}{1!2!}=3 \text{ (通り)}$$

である。この3つの両端及び間の4箇所のうち3箇所を選んで黄玉を入れればいいので

$z=3$ のときの並べ方は

$$3 \cdot {}_4C_3=12 \text{ (通り)}$$

である。

[3] $z=4$ のとき

黄玉の間にそれ以外の3つを入れなければならないので、3通りである。

以上(3)と[1],[2],[3]より求める場合の数は

$$60+18+12+3=93 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 93通り