

1

- (1) ア：－ イ：1 ウ：2 エ：1 オ：6
(2) カ：3 キ：0
(3) ク：1 ケ：5
(4) コ：－ サ：2 シ：3
(5) ス：3 セ：1
(6) ソ：2 タ：1
(7) チ：9 ツ：4 テ：1 ト：5
(8) ナ：－ ニ：9
(9) ヌ：5 ネ：6 ノ：9 ハ：2
(10) ヒ：1 フ：4

〔解説〕

(1)

α, β は方程式
$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

の解なので、
$$\begin{cases} \alpha^2 + 3\alpha = 1 \\ \beta^2 + 3\beta = 1 \end{cases}$$

であり、解と係数の関係より
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

いま
$$\begin{cases} u = \alpha(3 + 3\beta + \beta^2) \\ v = \beta(3 + 3\alpha + \alpha^2) \end{cases}$$

とおくと
$$\begin{cases} u = 4\alpha \\ v = 4\beta \end{cases}$$

となり、 u, v を解にもつ x についての 2 次方程式のうち、 x^2 の係数が 1 であるものは、
解と係数の関係より、
$$x^2 - (u + v)x + uv = 0$$

$$x^2 - 4(\alpha + \beta) + 16\alpha\beta = 0$$

と表される。したがって、求める方程式は、
$$x^2 + 12x - 16 = 0$$

$$x^2 = -12x + 16$$

となる。

(2)

求める場合の数は、「乗車可能人数の制限を無視して、5 人をそれぞれ好きな方の車に乗せる場合」から「全員が片方の車に乗る場合」を差し引いたものである。
ゆえに求める場合の数は、
$$2^5 - 2 = 30$$
 通り

(3)

上図のように、点 H, H', D を定める。
また、求める円 O' の半径を h とおく。
ここで、 $\angle OAH = 30^\circ$ より、
$$AH = \frac{OH}{\tan 30^\circ} = \frac{5}{\tan 30^\circ} = 5\sqrt{3}$$

$$AH' = \frac{O'H'}{\tan 30^\circ} = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}h$$

ゆえに、 $HH' = AH' - AH = \sqrt{3}(h - 5)$ 。
また、 $\triangle O'OD$ は $\angle O'OD = 30^\circ$ 、 $\angle O'DO = 90^\circ$ の直角三角形なので、
$$OD = OO' \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} OO'$$
 より、
$$OD = \frac{\sqrt{3}}{2}(5 + h)$$

また、 $OD = HH' = \sqrt{3}(h - 5)$
よって、
$$\frac{\sqrt{3}}{2}(5 + h) = \sqrt{3}(h - 5)$$

$$\therefore h = 15$$

(4)

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より、 $\sin \theta > 0$ である。
このため、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、
$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{5}{13}$$

ここで、倍角の公式を用いると、
$$\frac{\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right) \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{-\cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

となるため、
$$\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}$$

を代入すると、
$$\frac{-\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{-\frac{12}{13}}{1 + \frac{5}{13}}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

(5)

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) + 3 \cdot (n - 2) + \cdots + (n - 1) \cdot 2 + n \cdot 1$$

$$= \sum_{k=1}^n k \cdot (n - k + 1)$$

$$= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n + 1) \sum_{k=1}^n k$$

$$= -\frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1) \cdot \frac{1}{2} n(n + 1)$$

$$= \frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2)$$

$$= 5456$$

であり、
$$n(n + 1)(n + 2) = 2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$$

$$= 31 \cdot 32 \cdot 33$$

よって、
$$n = 31$$

(6)

真数条件、底に関する条件より、
$$x^2 - x - 20 > 0, x - 1 > 0$$

$$(x + 4)(x - 5) > 0, x > 1$$

$$x > 5$$

であり、問題の方程式の底を 2 に変換した場合を考えると、
$$\log_{x-1}(x^2 - x - 20) = \frac{\log_2(x^2 - x - 20)}{\log_2(x - 1)} = 2$$

$$\log_2(x^2 - x - 20) = \log_2(x - 1)^2$$

$$x^2 - x - 20 = (x - 1)^2$$

$$x = 21$$

となり、これは真数条件を満たす。

(7)

$t = 4 - x$ とおく。
このとき、
$$dt = -dx$$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \sqrt{4 - x} dx &= - \int_4^1 (4 - t) \sqrt{t} dt \\ &= \int_1^4 \left(4t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \right) dt \\ &= \left[\frac{8}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{94}{15} \end{aligned}$$

(8)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{s}\vec{a} + 2\vec{t}\vec{b} - \vec{c}) \cdot (2\vec{s}\vec{a} + \vec{t}\vec{b} + \vec{c})$$

$$= 2s^2 |\vec{a}|^2 + 2t^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 + 5s\vec{t}\vec{a} \cdot \vec{b} - s\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{t}\vec{b} \cdot \vec{c}$$

ここで、
$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2, \vec{a} \cdot \vec{c} = -1$$

より、
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 4s^2 + 2t^2 - 5 - 5st + s + 2t$$

$$= 4 \left(s + \frac{1 - 5t}{8} \right)^2 + \frac{7}{16} t^2 + \frac{21}{8} t - \frac{81}{16}$$

$$= 4 \left(s + \frac{1 - 5t}{8} \right)^2 + \frac{7}{16} (t + 3)^2 - 9$$

ここで s, t は全ての実数値を取りうるので、 $\vec{x} \cdot \vec{y}$ は
$$s = -\frac{1 - 5t}{8}, t = -3$$

つまり
$$s = -2, t = -3$$

の時最小となり、その値は -9 である。

(9)

行列 A についてケーリー・ハミルトンの定理より、
 O を零行列として、
$$A^2 - (1 + 0)A + (1 \cdot 0 - 2 \cdot 3)E = O$$

$$A^2 - A - 6E = O$$

ゆえに、求める式を順次計算していくと。
$$A^6 - A^5 - 7A^4 + 7A^2 + 9A + 2E = A^4(A^2 - A - 6E) - A^4 + 7A^2 + 9A + 2E$$

$$= (A + 6E)^2 + 7A^2 + 9A + 2E$$

$$= 6A^2 - 3A - 34E$$

$$= 3A + 2E$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

(10)

(i) $x \leq -1$ のとき
 $|x| = -x, |x + 1| = -x - 1$
である。このとき、
$$f(x) = 4e^x - x - 1$$

$$f'(x) = 4e^x - 1$$

 $f'(x) = 0$ となるのは、 $e^x = \frac{1}{4}$ となるとき、すなわち $x = -2\log 2$ のときのみ。
いま、 $4 > e$ なので $2 > \sqrt{e}$ であり、これから
$$\log 2 > \log \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$
 が成り立つので、
 $-2\log 2 < -1$ である。
ゆえに、 $x \leq -1$ での $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-2\log 2$	$\cdots$	-1
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2\log 2$	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$

(ii) $-1 < x \leq 0$ のとき
 $|x| = -x, |x + 1| = x + 1$
である。このとき、
$$f(x) = 4e^x + x + 1$$

$$f'(x) = 4e^x + 1$$

 $e^x > 0$ より、常に $f'(x) > 0$ 。
ゆえに、 $-1 < x \leq 0$ での $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	5

(iii) $0 < x$ のとき
 $|x| = x, |x + 1| = x + 1$
である。このとき、
$$f(x) = 4e^{-x} + x + 1$$

$$f'(x) = -4e^{-x} + 1$$

 $f'(x) = 0$ となるのは、 $e^{-x} = \frac{1}{4}$ となるとき、すなわち $x = 2\log 2$ のときのみで、
$$2\log 2 > 2\log 1 = 0$$

である。ゆえに、 $0 < x$ での $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$\searrow$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$2\log 2 + 2$	$\nearrow$

以上(i)～(iii)より、 $f(x)$ の最小値は $x = -2\log 2$ のときの $2\log 2$ である。

この最小値を取るときの x を $x = a$ とすると、 $e^a = \frac{1}{4}$ である。

(1)

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) + xy$$

に $x=y=1$ を代入すると,

$$f(1) = f(1) + f(1) + 1$$

ゆえに,

$$f(1) = -1$$

(答) -1

(2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{xf\left(1+\frac{h}{x}\right) + x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right) + 1}{\frac{h}{x}}$$

ここで, $\frac{h}{x} = t$ とおく。 $h \rightarrow 0$ なので, $t \rightarrow 0$ 。

ゆえに(1)の結果も用いて,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right) + 1}{\frac{h}{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) + 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} \\ &= f'(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(3)

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) + xy$$

に $y = 1 + \frac{h}{x}$ を代入すると,

$$f\left(x + h\right) = xf\left(1 + \frac{h}{x}\right) + \left(1 + \frac{h}{x}\right)f(x) + (x + h)$$

$$xf\left(1 + \frac{h}{x}\right) = f(x + h) - \left(1 + \frac{h}{x}\right)f(x) - (x + h)$$

この両辺を $h \neq 0$ で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{xf\left(1 + \frac{h}{x}\right) + x}{h} &= \frac{f(x + h) - \left(1 + \frac{h}{x}\right)f(x) - h}{h} \\ \frac{xf\left(1 + \frac{h}{x}\right) + x}{h} &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \left\{\frac{f(x)}{x} + 1\right\} \end{aligned}$$

得られた等式の $h \rightarrow 0$ の極限をとる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{xf\left(1 + \frac{h}{x}\right) + x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \left\{\frac{f(x)}{x} + 1\right\}$$

ここで, (2)より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{xf\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = 0$$

また, $f(x)$ が微分可能であることから,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

とできる。したがって,

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) - \left\{\frac{f(x)}{x} + 1\right\} \\ f'(x) &= \frac{f(x)}{x} + 1 \end{aligned}$$

(答) $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$

(4)

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ の両辺を x について微分すると, (3)の結果を用いて,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{\left\{\frac{f(x)}{x} + 1\right\} \cdot x - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{f(x) + x - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(答) $g'(x) = \frac{1}{x}$

(5)

(3)より, $f'(x) = g(x) + 1$ 。

両辺を x について微分すると,

$$f''(x) = g'(x) = \frac{1}{x}$$

ゆえに,

$$f'(x) = \log x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

ここで $f'(1) = 0$ より, $f'(1) = \log 1 + C_1 = C_1 = 0$ となるため,

$$f'(x) = \log x$$

となる。よって, 部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \log x \, dx \\ &= x \log x - x + C_2 \end{aligned}$$

(C_2 は積分定数)

ここで $f(1) = -1$ より, $f(1) = -1 + C_2 = -1$ 。ゆえに, $C_2 = 0$ 。

以上より,

$$f(x) = x \log x - x$$

となる。

(答) $f(x) = x \log x - x$