

- (1) $(y-z)(x-1)$ (2) $x=3,4$ (3) $n=-\frac{1}{2}$ (4) $(p,q)=(2,1)$
- (5) 5 個 (6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (7) 0.004 (8) A

【解説】

(1)
$$(y-z)x-y+z=(y-z)x-(y-z)=(y-z)(x-1)$$

(2)
$$\begin{aligned} \{(x-2)-2\}\{(x-2)-1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3, 4 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = \sqrt{6}x + n \end{cases}$$

この2つの方程式から y を消去して、

$$x^2 - \sqrt{6}x + 1 - n = 0$$

今、この方程式の判別式を D とすると、放物線と直線が接することは、 $D = 6 - 4(1 - n) = 0$ であることと等しい。よってこれを解いて

$$n = -\frac{1}{2}$$

(4)
$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2p - p\sqrt{3} - 2q\sqrt{3} + 3q \\ &= 2p + 3q - (p + 2q)\sqrt{3} \end{aligned}$$

p, q は整数より $2p + 3q, p + 2q$ も整数だから両辺で整数部と根号部 ($\sqrt{3}$) の係数を比較して、

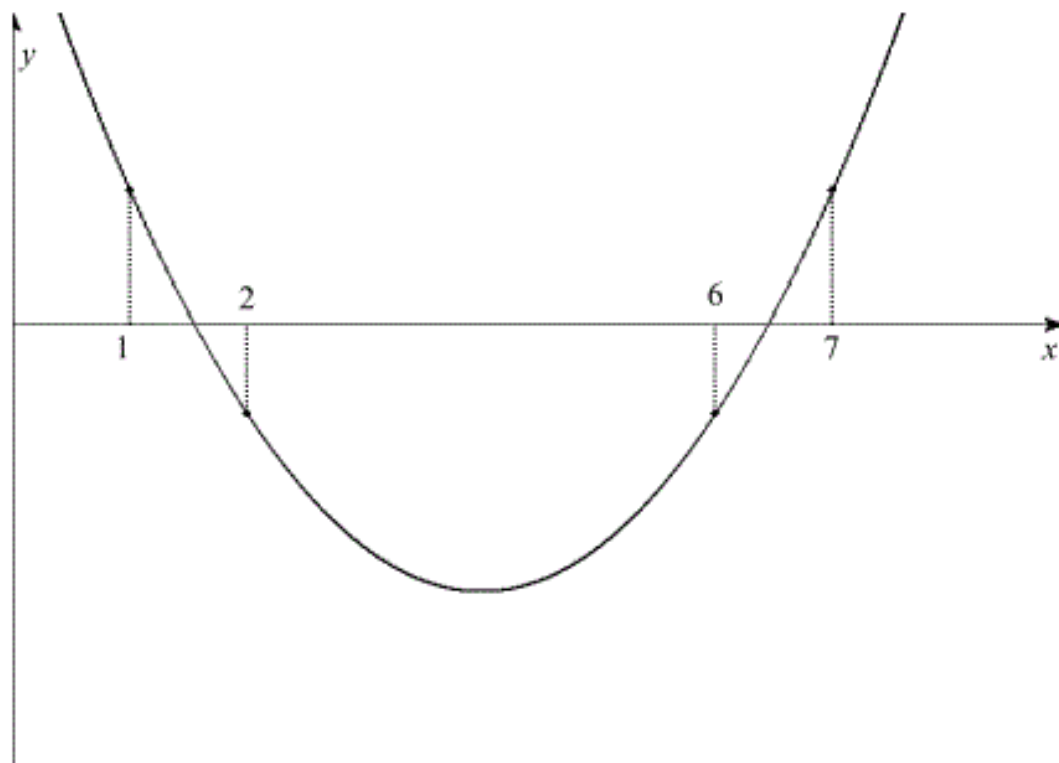
$$\begin{cases} 7 = 2p + 3q \\ 4 = p + 2q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 1 \end{cases}$$

これは p, q が整数であることを満たす。

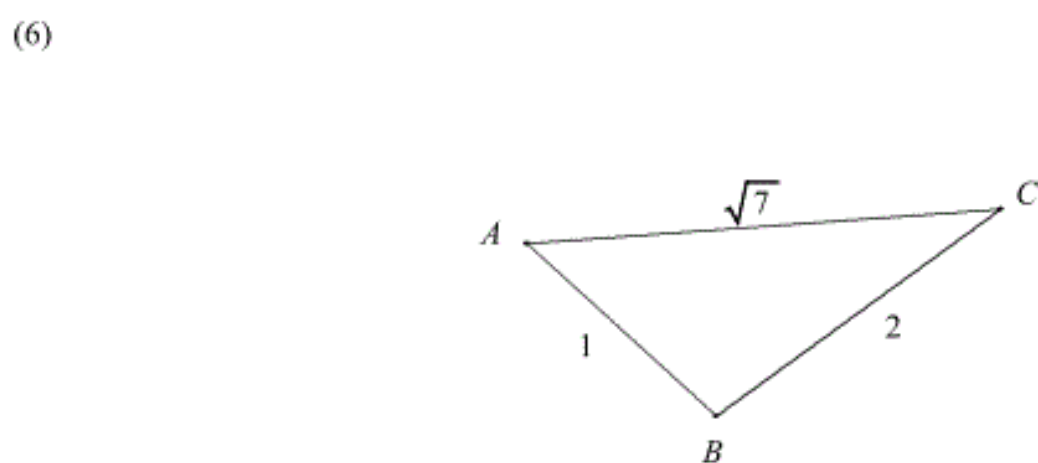
(5) $f(x) = x^2 - 8x + 10$ とすると

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 > 0 \\ f(2) &= -2 < 0 \\ f(6) &= -2 < 0 \\ f(7) &= 3 > 0 \end{aligned}$$

よって $y = f(x)$ のグラフは下のようになる。



グラフより $f(x) < 0$ を満たす整数 x は 2, 3, 4, 5, 6 の 5 つ。



余弦定理より、

$$\cos B = \frac{4 + 1 - 7}{2 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

よって

$$\sin B = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(7)
$$\begin{aligned} (1+0.001)^2 - (1-0.001)^2 &= \{(1+0.001) + (1-0.001)\} \{(1+0.001) - (1-0.001)\} \\ &= 2 \cdot 0.002 \\ &= 0.004 \end{aligned}$$

- (8) $a^2 > b^2$ ならば $a^3 > b^3$ は偽 (反例: $a = -3, b = 1$)
 $a^3 > b^3$ ならば ($a > b$ より) $a^2 > b^2$ は真
 よって必要条件だが、十分条件ではない (A)

$$(1) \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2) \quad 0 \qquad (3) \quad \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad (m, n) = (2, -1), (-3, 2) \qquad (5) \quad (a, b) = \left(-\frac{4}{3}, 3\right)$$

【解説】

(1)

$\triangle ABC$ における余弦定理より、

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{2+1-3}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = 0$$

が成り立ち、 $\angle C = 90^\circ$ である。よって、線分 AB が $\triangle ABC$ の外接円の直径となるので、半径

R は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

(2)

二項定理より、

$$\begin{aligned} (1-1)^6 &= {}_6C_0 - {}_6C_1 + {}_6C_2 - {}_6C_3 + {}_6C_4 - {}_6C_5 + {}_6C_6 \\ &= 2 - {}_6C_1 + {}_6C_2 - {}_6C_3 + {}_6C_4 - {}_6C_5 \end{aligned}$$

ただし、 ${}_6C_0 = {}_6C_6 = 1$ を用いた。全体を -1 倍すれば、

$${}_6C_1 - {}_6C_2 + {}_6C_3 - {}_6C_4 + {}_6C_5 - 2 = -(1-1)^6 = 0$$

(3)

全ての出し方は、各人がグー、チョキ、パー(以下グ、チ、パとする)の3通りの手を出せるので、 $3^3 = 27$ 通りである。

3人(仮に ABC とする)が出す手を (A, B, C) で表すこととすると、あいこになるのは

$(グ, グ, グ), (チ, チ, チ), (パ, パ, パ)$

$(グ, チ, パ), (グ, パ, チ), (チ, パ, グ), (チ, グ, パ), (パ, グ, チ), (パ, チ, グ)$

の9通り。

よって求める確率は

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

(4)

$$3m + 5n = 1 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数 m, n について考える。

[i] $|m+n|=0$ と仮定すると $m=-n$ である。これを①に代入して、

$$2n = 1 \Leftrightarrow n = \frac{1}{2}$$

これは、 n が整数であることに反する。

[ii] $|m+n|=1$ となると仮定すると $m+n=\pm 1$ である。

[ii-a] $m+n=1$ のとき、 $m=1-n$ であるので、これを①に代入して、

$$3-3n+5n=1 \Leftrightarrow n=-1$$

このとき $m=2$ でこれは m, n が整数であることを満たす。

[ii-b] $m+n=-1$ のとき、 $m=-1-n$ であるので、これを①に代入して、

$$-3-3n+5n=1 \Leftrightarrow n=2$$

このとき $m=-3$ でこれは m, n が整数であることを満たす。

以上より、 $|m+n|$ は最小が1で、そのとき

$$(m, n) = (2, -1), (-3, 2)$$

(5)

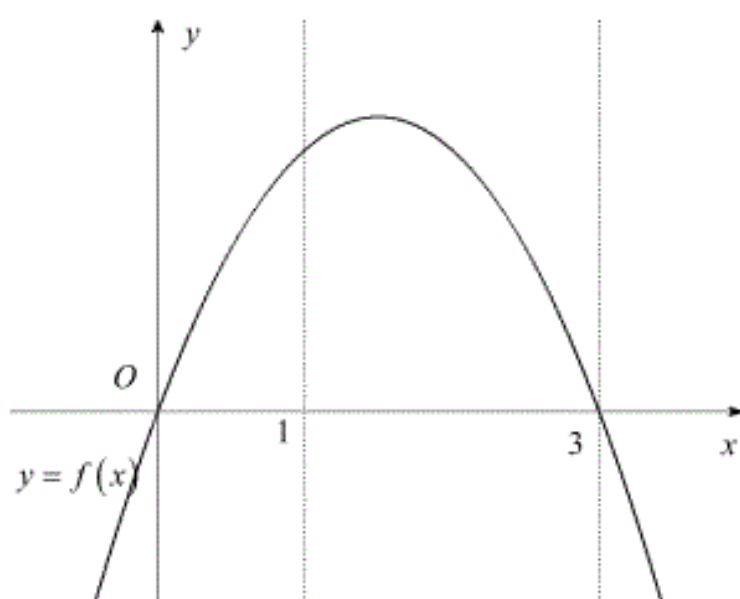
$y=f(x)$ は、上に凸の放物線なので、閉区間ではその端点で最小値をとる。すなわち、

$f(1)=0$ または $f(3)=0$ が成り立つ。

[i] $f(1)=0$ のとき

このとき $b=1$ であり、 $f(x)=ax(x-1)$ とかけるが、 $f(3)=6a<0$ となり、これは最小値が0であることに反する。よって不適。

[ii] $f(3)=0$ のとき



このとき $b=3$ であり、

$$f(x) = ax(x-3) = a \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}a$$

とかけ、区間 $1 \leq x \leq 3$ において、 $x = \frac{3}{2}$ で最大値 $-\frac{9}{4}a$ を、 $x=3$ で最小値 0 を取ることが分かる。最大値が3であることから、

$$-\frac{9}{4}a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$$

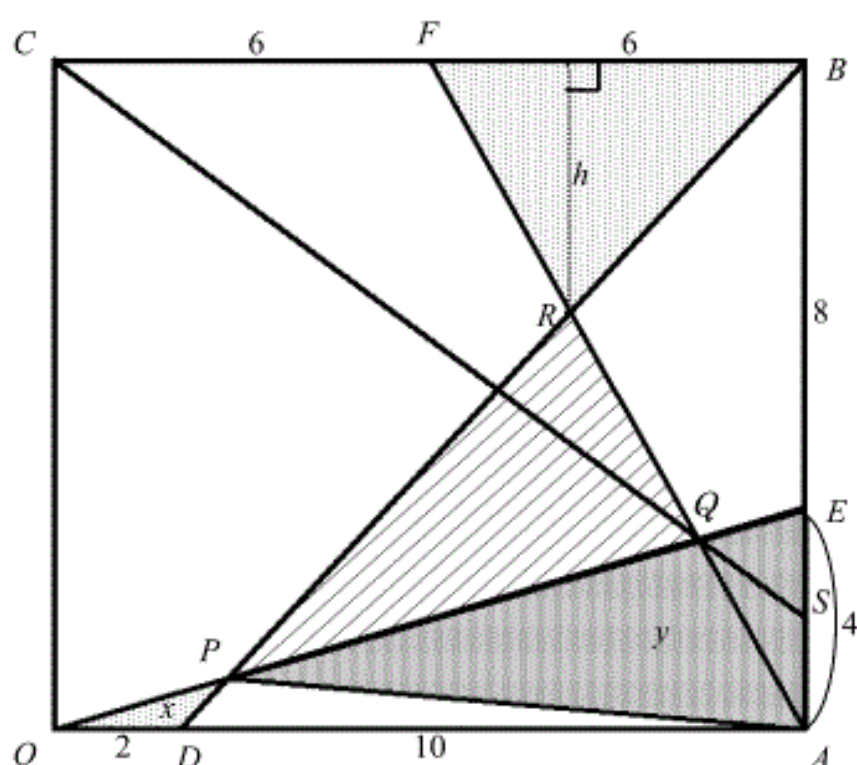
[i][ii]より、 $a = -\frac{4}{3}$, $b = 3$ 。

3

- (1)

ア	3	イ	5	ウ	$\frac{9}{2}$	エ	$\frac{27}{2}$	オ	5
カ	3	キ	60	ク	6	ケ	$\frac{12}{13}$	コ	$\frac{240}{13}$
- (2) $\frac{375}{26}$

【解説】



- (1) $\triangle RBF$ の頂点 R から辺 BF に下した垂線の長さを h とする。

$\triangle RBF \sim \triangle RDA$ だから

$$BF:DA = 6:10 = 3:5$$

より,

$$h = \frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{9}{2}$$

であり, $\triangle RBF$ の面積は

$$6 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{2}$$

である。次に, $\triangle POD$ の面積を x , $\triangle PAE$ の面積を y とおく。

$\triangle ABD = \triangle PDA + \triangle PAB$ について

$$\triangle POD : \triangle PDA = OD : DA = 1:5$$

$$\triangle PAB : \triangle PAE = AB : AE = 3:1$$

より $\triangle PDA + \triangle PAB = 5\triangle POD + 3\triangle PAE$ が成り立つ。一方で, $\triangle ABD$ の面積は

$$12 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 60 \text{ だから,}$$

$$5x + 3y = 60 \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に $\triangle OAE$ についても, $\triangle OPD + \triangle PDA + \triangle PAE = \triangle OAE$ より,

$$6x + y = 24 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

①と②を連立させて解いて,

$$x = \frac{12}{13}, y = \frac{240}{13}$$

よって $\triangle POD$ の面積は $\frac{12}{13}$ である。

(2)

$\triangle PQR = \triangle DAR - \triangle DPA - \triangle PAQ$ である。

$\triangle DAR$ の面積は $(12-h) \cdot DA \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{2}$, $\triangle DPA = 5\triangle OPD$ なので, その面積は

$$5x = \frac{60}{13}, \triangle PAQ \text{ の面積は } y = \frac{240}{13}.$$

よって,

$$(\triangle PQR \text{ の面積}) = \frac{75}{2} - \frac{60}{13} - \frac{240}{13} = \frac{375}{26}$$