

1

(1)	ア	－	イ	3	ウ	4
(2)	エ	－	オ	2	カ	4
(3)	キ	－	ク	1	ケ	0
(4)	コ	－	サ	1	シ	3
(5)	ス	1	セ	6	ソ	4
(6)	タ	1	チ	4		
(7)	ツ	3	テ	3	ト	2
(8)	ナ	1	ニ	5	ヌ	3
(9)	ネ	3	ノ	7	ハ	2
(10)	ヒ	2	フ	9	ヘ	8
					ホ	4

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}y &= x^2 + k \\ \Leftrightarrow x^2 &= y - k \\ \Leftrightarrow x &= \pm \sqrt{y - k}\end{aligned}$$

から交点の y 座標が 1 つ存在し、 $y \neq k$ であれば 2 つの曲線は交点を 2 個もつことになる。したがって

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = x^2 + k \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow y - k - y^2 = 1 \\ \Leftrightarrow y^2 - y + 1 + k = 0\end{aligned}$$

の解が 1 個である条件は、この判別式を D とおくと

$$\begin{aligned}D &= 1 - 4(1 + k) = 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。このとき、

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \therefore y = \frac{1}{2}$$

であるから、 $y \neq k$ を満たす。

(2)

$$|\vec{a} - \vec{x}|^2 + |\vec{b} - \vec{x}|^2 + |\vec{c} - \vec{x}|^2 = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

となる。ここで $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$ は定数である。また $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-6, 12)$ である。ここで $\vec{x} = (p, q)$ と

おくと

$$\begin{aligned}3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 &= 3p^2 + 3q^2 - 2(-6p + 12q) + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= 3(p + 2)^2 + 3(q - 4)^2 - 60\end{aligned}$$

となる。これは $p = -2, q = 4$ で最小値をとる。

(3)

$x > 0, y > 0$ より、相加・相乗平均の公式から

$$\frac{2y}{5x} + \frac{x}{2y} \geq 2\sqrt{\frac{2y}{5x} \cdot \frac{x}{2y}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる。等号成立は

$$\begin{aligned}\frac{2y}{5x} &= \frac{x}{2y} \\ \Leftrightarrow 5x^2 &= 4y^2 \\ \therefore y &= \frac{\sqrt{5}}{2}x \quad (\because x > 0, y > 0)\end{aligned}$$

となる。つまり $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ のとき $\frac{2y}{5x} + \frac{x}{2y}$ は最小値をとる。このとき

$$\begin{aligned}\frac{5x}{2x - \sqrt{5}y} &= -\frac{5x}{2x - \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}x} \\ &= -\frac{5x}{2x - \frac{5}{2}x} \\ &= -10\end{aligned}$$

となる。

(4)

$f(x) = 3$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{3kx + 2}{kx - 1} &= 3 \\ \Leftrightarrow 3kx + 2 &= 3kx - 3\end{aligned}$$

となり不適である。したがって、

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3kx + 2}{kx - 1} \\ \Leftrightarrow (kx - 1)f(x) &= 3kx + 2 \\ \Leftrightarrow \{kf(x) - 3k\}x &= 2 + f(x) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{f(x) + 2}{k\{f(x) - 3\}} \quad (\because f(k) \neq 3)\end{aligned}$$

となるので $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{k(x - 3)}$ ($x \neq 3$) である。ここで $f^{-1}(-x) = -f(x)$ から、 $x \neq -3$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{-x + 2}{k(-x - 3)} &= -\frac{3kx + 2}{kx - 1} \\ \Leftrightarrow (-x + 2)(kx - 1) &= k(3kx + 2)(kx - 1) \\ \Leftrightarrow (3k^2 + k)x^2 + (9k^2 - 1)x + 6k + 2 &= 0\end{aligned}$$

となる。これが x の恒等式となるので

$$\begin{cases} 3k^2 + k = 0 \\ 9k^2 - 1 = 0 \\ 6k + 2 = 0 \end{cases} \\ \therefore k = -\frac{1}{3}$$

となる。

(5)

両辺に 2 を底とする対数をとると

$$\begin{aligned}(3 + 2\log_2 x)\log_2 x &= 27\log_2 4 \\ \Leftrightarrow 2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - 54 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x + 6)(2\log_2 x - 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= -6, \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{64}, 2^{\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{64} < 2^{\frac{9}{2}}$ から求める解は $x = \frac{1}{64}$ となる。

(6)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right\}}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}'}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。

(7)

円 O_{n+1}, O_n の中心を D, E とし、 O を通り AB と平行な直線と E を通り AB に垂直な直線との交点を F とすると、

$$\begin{aligned}DE &= r_n + r_{n+1} \\ DF &= \sqrt{3}(r_n - r_{n+1})\end{aligned}$$

となる。 $\angle EDF$ は 30° となるので $DE : DF = 2 : \sqrt{3}$ となることから

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(r_n + r_{n+1}) &= 2\sqrt{3}(r_n - r_{n+1}) \\ \Leftrightarrow r_{n+1} &= \frac{1}{3}r_n\end{aligned}$$

となる。したがって $S_{n+1} = \frac{1}{9}S_n$ となる。ここで $\triangle ABC$ が正三角形であることから O_1 の中心

は円の外心と一致するので

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{\sqrt{3}}{6} \\ S_1 &= \frac{3}{36}\pi = \frac{1}{12}\pi\end{aligned}$$

となる。以上から $\{S_n\}$ は初項 $\frac{1}{12}\pi$ 、公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列となるので

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9} \right)^N}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{3}{32}\pi\end{aligned}$$

となる。

(8)

$$x^2 + 2(a - 2)x + a = \{x - (2 - a)\}^2 - a^2 + 5a - 4$$

より軸の位置で場合分けすると

[1] $2 - a < 0$ のとき

このとき $x = 0$ で最小値 a 、 $x = 1$ で最大値 $1 + 2(a - 2) + a = 3a - 3$ をとるので

$$\begin{aligned}a \geq 0 \text{ かつ } 3a - 3 \leq 2 \\ \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}2 - a < 0 \\ \Leftrightarrow a > 2\end{aligned}$$

からこの場合は不適である。

[2] $0 \leq 2 - a < \frac{1}{2}$ のとき

このとき $x = 2 - a$ で最小値 $-a^2 + 5a - 4$ 、 $x = 1$ で最大値 $3a - 3$ をとるので

$$\begin{aligned}-a^2 + 5a - 4 \geq 0 \text{ かつ } 3a - 3 \leq 2 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a - 4) \leq 0 \text{ かつ } a \leq \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow 1 \leq a \leq \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}0 \leq 2 - a < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} < a \leq 2\end{aligned}$$

から求める範囲は $\frac{3}{2} < a \leq \frac{5}{3}$ である。

[3] $\frac{1}{2} \leq 2 - a \leq 1$ のとき

このとき $x = 2 - a$ で最小値 $-a^2 + 5a - 4$ 、 $x = 0$ で最大値 a をとるので

$$\begin{aligned}-a^2 + 5a - 4 \geq 0 \text{ かつ } a \leq 2 \\ \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 2\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leq 2 - a \leq 1 \\ \Leftrightarrow 1 \leq a \leq \frac{3}{2}\end{aligned}$$

から求める範囲は $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ である。

[4] $1 < 2 - a$ のとき

このとき $x = 1$ で最小値 $3a - 3$ 、 $x = 0$ で最大値 a をとるので

$$\begin{aligned}3a - 3 \geq 0 \text{ かつ } a \leq 2 \\ \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 2\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}1 < 2 - a \\ \Leftrightarrow a < 1\end{aligned}$$

からこの場合は不適である。

[1], [2], [3], [4] から求める範囲は $1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ となる。

(9)

$\overrightarrow{NE}$ と $\overrightarrow{ND}$ は大きさが同じで方向が逆のベクトルなので $\overrightarrow{NE} = -\overrightarrow{ND}$ となる。これを用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{EC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC})\end{aligned}$$

となる。ここで $\angle A$ は $\frac{2}{3}\pi$ であるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} &= 7 \cdot 3 \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= -\frac{21}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{NM}| &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} + |\overrightarrow{EC}|^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{49 - 21 + 9} \\ &= \frac{\sqrt{37}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(10)

a, b, c, d の選び方は全部で ${}_4P_4 = 3024$ 通りある。ここで行列が逆行列をもたないとき

$$\begin{aligned}ad - bc &= 0 \\ \Leftrightarrow ad &= bc\end{aligned}$$

となるので $ad = bc$ となる場合の数をひけばよい。ここで $ad = bc$ となるのは $ad = bc = 6, 8, 12, 18, 24$ の 5 通りであり、それぞれに対して 8 通りずつ a, b, c, d の選び方があるので求める場合の数は $3024 - 8 \cdot 5 = 2984$ 通りである。

(1)	ア	1	イ	4	ウ	5	エ	6
(2)	オ	3	カ	4				
(3)	キ	－	ク	1	ケ	4		
(4)	コ	4	サ	2	シ	2		

(1)

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \left[\frac{2\theta - \sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \theta)' \sin^5 \theta d\theta \\
 &= -\left[\cos \theta \sin^5 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^4 \theta d\theta \\
 &= 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \sin^4 \theta d\theta \\
 &= 5(I_4 - I_6) \\
 \Leftrightarrow 6I_6 &= 5I_4 \\
 \Leftrightarrow I_6 &= \frac{5}{6} I_4
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

もとめる面積を S とおくと

$$S = \int_0^8 y dx$$

となる。ここで $x = 8 \cos^3 t, y = \sin^3 t$ とおくと, $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$

$$dx = -24 \cos^2 t \sin t dt$$

x	0	$\rightarrow$	8
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

となるので

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^8 y dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -24 \cos^2 t \sin^4 t dt \\
 &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^4 t dt \\
 &= 24(I_4 - I_6)
 \end{aligned}$$

となる。ここで(1)の結果から

$$\begin{aligned}
 24(I_4 - I_6) &= 24 \cdot \frac{1}{6} I_4 \\
 &= 4I_4
 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \theta)' \sin^3 \theta d\theta \\
 &= -\left[\cos \theta \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\
 &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta \\
 &= 3(I_2 - I_4) \\
 \Leftrightarrow 4I_4 &= 3I_2
 \end{aligned}$$

から

$$S = 3I_2 = \frac{3}{4} \pi$$

となる。

(3)

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 4 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} y^{\frac{2}{3}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{8}{3} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} y^{-\frac{1}{3}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

(4)

接点を $(8 \cos^3 t, \sin^3 t) (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ とおくと, 接線の方程式は

$$\begin{aligned}
 y - \sin^3 t &= \frac{dy}{dx} (x - 8 \cos^3 t) \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{dy}{dx} (x - 8 \cos^3 t) + \sin^3 t
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin t}{2 \cos t} \\
 &= -\frac{\sin t}{8 \cos t}
 \end{aligned}$$

から接線は

$$y = -\frac{\sin t}{8 \cos t} (x - 8 \cos^3 t) + \sin^3 t$$

となる。ここで x 軸との交点を考えると

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\sin t}{8 \cos t} (x - 8 \cos^3 t) + \sin^3 t \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin t}{8 \cos t} x &= \sin t \cos^2 t + \sin^3 t = \sin t (\sin^2 t + \cos^2 t) \\
 \Leftrightarrow x &= 8 \cos t
 \end{aligned}$$

となる。つまり A の座標は $(8 \cos t, 0)$ となる。同様に y 軸との交点を考えると

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{\sin t}{8 \cos t} (-8 \cos^3 t) + \sin^3 t \\
 &= \sin t \cos^2 t + \sin^3 t \\
 &= \sin t (\sin^2 t + \cos^2 t) \\
 &= \sin t
 \end{aligned}$$

となるので B の座標は $(0, \sin t)$ となる。以上から $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot 8 \cos t \sin t &= 4 \sin t \cos t \\
 &= 2 \sin 2t
 \end{aligned}$$

となる。これは $t = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 2 をとる。このとき A の座標は $(4\sqrt{2}, 0)$ である。