$\boxed{1}$

$\boxed{アイ}$ 36

[解説]

△ ABC において，$\angle CAB = a$, $\angle CBA = b$ とおくと，

$$\angle CAB + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow a + b + 108^\circ = 180^\circ$$
$$\therefore a + b = 72^\circ$$

が成り立つ。また，接弦定理より

$$\angle PAC = \angle CBA = b$$
$$\angle PBC = \angle CAB = a$$

も成り立つので，△APB に着目すると，

$$\angle APB + \angle PBA + \angle PAB = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \angle APB + (\angle PBC + \angle BCA) + (\angle PAC + \angle CAB) = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \angle APB + (a + b) + (b + a) = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \angle APB = 180^\circ - 2(a + b)$$
$$\Leftrightarrow \angle APB = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ$$
$$\therefore \angle APB = 36^\circ$$

と求まる。

$\boxed{2}$

$\boxed{\text{ウエ}}$ 66

[解説]

集合 A の要素の個数を $n(A)$ のように表すとする。ここで

$$n((A\cup B)\cap C)=n((A\cap C)\cup(B\cap C))$$
$$=n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)$$

である。3 と 7 は互いに素であるから, $n(A\cap C)$ は 1 から 1000 までの自然数のうち, 21 の倍数である自然数の数である。

$1000=21\times47+13$ であるので

$$n(A\cap C)=47$$

である。同様にして $n(B\cap C)$ は 1 から 1000 までの自然数のうち, 35 の倍数である自然数の数であるので $1000=35\times28+20$ より

$$n(B\cap C)=28$$

となる。また, $n(A\cap B\cap C)$ は 1 から 1000 までの自然数のうち,105（3, 5, 7 の最小公倍数）の倍数である自然数の数であるので $1000=105\times9+55$ より

$$n(A\cap B\cap C)=9$$

となる。

以上より

$$n((A\cup B)\cap C)=47+28-9$$
$$=66$$

となる。

$\boxed{3}$

$\boxed{\text{オカ}}$ 18

[解説]

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置く。点 $(1,1)$, $(1,-1)$ が行列 A の定める一次変換 f によってそれぞれ点 $(12,7)$, $(8,-9)$ に移されることから

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \qquad ・・・①$$

が成り立つ。ここで，$1\cdot(-1)-1\cdot1=-2\neq0$ より $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ には逆行列が存在し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。これを①の両辺に右からかけると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と求まるので，結局

$$\begin{aligned}a+d&=10+8\\&=18\end{aligned}$$

である。

$\boxed{4}$

$\boxed{\text{キ}}$ 1 $\boxed{\text{クケ}}$ 36

[解説]

3 個のサイコロを全て区別するとする。このとき全事象は $6^3 = 216$ 通りである。

サイコロの出た目を $(1, 2, 3)$ のように順番を区別して表すとする。たとえば $(1, 2, 3)$ と $(2, 3, 1)$ は異なる目の出方を表している。

出た目のうち最大の目が 4 かつ最小の目が 3 であるという条件を満たす目の出方は

$$(3, 3, 4),\ (3, 4, 3),\ (4, 3, 3),\ (4, 4, 3),\ (3, 4, 4),\ (4, 3, 4)$$

の 6 通りのみである。したがって，求める確率は

$$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

である。

$\boxed{5}$

$\boxed{コ}$ 3 $\boxed{サ}$ 9

[解説]

極限をとる関数を通分し，分子を有理化すると次のようになる。

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{3+\sin x}}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3+\sin x}-\sqrt{3-\sin x}}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{\sqrt{9-\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であることより，上式において $x\to 0$ の極限をとると

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{3+\sin x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{\sqrt{9-\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x}}$$

$$=1\cdot\frac{2}{\sqrt{9-0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+0}+\sqrt{3-0}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

となる。

6

シス　-1

[解説]

2つの2次方程式が共通解αを持つとする。αが2つの2次方程式の解であるということより

$$2\alpha^2+k\alpha-1=0 \qquad \cdots ①$$
$$2\alpha^2-2\alpha+k+1=0 \qquad \cdots ②$$

が成り立つ。①－②より

$$(k+2)\alpha-(k+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (k+2)(\alpha-1)=0$$

となるので，共通解が存在するためには$k=-2$または$\alpha=1$が必要である。

[1] $k=-2$のとき

$k=-2$を2つの2次方程式に代入するといずれも

$$2x^2-2x-1=0$$

となる。判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(-1)=3>0$$

であるので，この2次方程式は相異なる2つの実数解を持つことになり，不適である。

[2] $\alpha=1$のとき

$\alpha=1$を①，②式に代入するといずれの式においても

$$k=-1$$

となる。$k=-1$を2つの2次方程式に代入すると，それぞれ

$$2x^2+x-10=0$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)=0$$
$$\therefore x=1,\ -\frac{1}{2}$$

$$2x^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x-1)=0$$
$$\therefore x=1,\ 0$$

となり，共通解は$\alpha=1$のみであるから適する。

以上[1], [2]より，

$$k=-1$$

である。

7

$\boxed{\text{セソ}}$ -3 $\boxed{\text{タ}}$ 2

[解説]

まず，条件式より $x \neq 0,\ y \neq 0$ である。

与えられた条件式 $\dfrac{1}{8^x} = 36$ の両辺の，底を 2 とする対数を取ると

$$\log_2 2^{-3x} = \log_2 \left(2^2 \cdot 3^2\right)$$
$$\therefore \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\log_2 3}$$

となる。同様に条件式 $\dfrac{1}{27^y} = 36$ の両辺の，底を 3 とする対数を取ると

$$\log_3 3^{-3y} = \log_3 2^2 \cdot 3^2$$
$$\therefore \frac{1}{y} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\log_3 2}$$

となる。底の変換公式より

$$\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\log_2 3\right)\left(\log_3 2\right) = 1$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+\log_2 3} + \frac{1}{1+\log_3 2}\right) \\
&= -\frac{3}{2}\left(\frac{1+\log_2 3+1+\log_3 2}{1+\log_3 2+\log_2 3+\log_2 3\log_3 2}\right) \\
&= -\frac{3}{2}\left(\frac{1+\log_2 3+1+\log_3 2}{1+\log_2 3+1+\log_3 2}\right) \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{8}$

$\boxed{チ}$ 0 $\boxed{ツ}$ 1 $\boxed{テ}$ 2

[解説]

2 曲線 $y=a\left(x^2+1\right)$, $y=2x^2-x^3$ が相違なる 3 つの点で交わるための条件は, 3 次方程式

$$a\left(x^2+1\right)=2x^2-x^3 \Leftrightarrow x^3+(a-2)x^2+a=0$$

が相違なる 3 つの実数解を持つことである。ここで

$$f(x)=x^3+(a-2)x^2+a$$

とおくと, 3 次方程式 $f(x)=0$ が相違なる 3 つの実数解を持つ条件は $y=f(x)$ のグラフが相違なる 2 つの点で極値をとりかつ極値の符合が互いに異なることである。ここで

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2+2(a-2)x \\ &=3x\left\{x+\frac{2}{3}(a-2)\right\} \end{aligned}$$

であるので, $y=f(x)$ のグラフが相違なる 2 つの点で極値を取るための条件は

$$a\neq 2$$

である。$a\neq 2$ の下で, 極値の x 座標は

$$x=0,\ -\frac{2}{3}(a-2)$$

なので, 2 つの極値の符号が異なるための条件は

$$f(0)\cdot f\left(-\frac{2}{3}(a-2)\right)<0$$

である。これを計算すると

$$\begin{aligned} &a\left\{-\frac{8}{27}(a-2)^3+\frac{4}{9}(a-2)^3+a\right\}<0 \\ &\Leftrightarrow a\left(4a^3-24a^2+75a-32\right)<0 \\ &\Leftrightarrow a(2a-1)\left(2a^2-11a+32\right)<0 \\ &\Leftrightarrow a(2a-1)\left\{\left(a-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{135}{16}\right\}<0 \end{aligned}$$

これを解くと

$$0<a<\frac{1}{2}$$

であり, これは $a\neq 2$ をみたす。したがって, これが求める a の範囲である。

9

ト 6 ナ 6

[解説]

Pを直線 l 上の点とする。直線 l は2点 $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ を通るので点Pは s をパラメーターとして

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (s, s, s)$$

と表される。

同様にして，Qを直線 m 上の点とする。直線 m は2点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ を通るので t をパラメーターとして

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t, t, 0)$$

と表される。

したがって，2点P, Q間の距離を d とすると

$$\begin{aligned} d^2 &= (1-t-s)^2 + (t-s)^2 + (-s)^2 \\ &= 2t^2 - 2t + 3s^2 - 2s + 1 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

と表せる。これが最小となるのは $t = \frac{1}{3}$ かつ $s = \frac{1}{2}$ のときであり，そのときの値は

$$d^2 = \frac{1}{6}$$

$$\therefore d = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

である。

10

$\boxed{ニ}$ 1 $\boxed{ヌ}$ 3

[解説]

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

である。$y=f(x)$ が $x=0$ において x 軸に接することから，

$$f(0)=0 \quad かつ \quad f'(0)=0$$

$$\therefore c=d=0$$

と求まる。ここで，

$$\begin{aligned} g(x)&=f(x)-(x-9)\\ &=x^4+ax^3+bx^2-x+9 \end{aligned}$$

とおき，$y=f(x)$ と $y=x-9$ が接する 2 点の x 座標を α, β とおくと，

$$\begin{aligned} g(x)&=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\\ &=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+2\left\{(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta\right\}-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+(\alpha\beta)^2 \end{aligned}$$

と表せる。$g(x)$ の 2 つの表式の係数を比較することで

$$\begin{cases} a=-2(\alpha+\beta)\\ b=2\left\{(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta\right\}\\ 1=2\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ 9=(\alpha\beta)^2 \end{cases} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

が成り立つことがわかる。よって，第 4 式より

$$\alpha\beta=\pm 3$$

である。

[1] $\alpha\beta=3$ のとき

①の第 3 式から $\alpha+\beta=\dfrac{1}{6}$ であるから，α, β は t の 2 次方程式

$$t^2-\frac{1}{6}t+3=0$$

の 2 解となる。しかし，この判別式 D_1 は

$$D_1=\left(-\frac{1}{6}\right)^2-4\cdot 3=-\frac{431}{36}<0$$

となるから，α, β が実数であるという仮定に反する。

[2] $\alpha\beta=-3$ のとき

同様に $\alpha+\beta=-\dfrac{1}{6}$ より，α, β は t の 2 次方程式

$$t^2+\frac{1}{6}t-3=0$$

の 2 解となる。この判別式 D_2 は

$$D_2=\left(\frac{1}{6}\right)^2-4\cdot(-3)=\frac{433}{36}>0$$

となるから，α, β はともに実数となり，条件に適する。

以上[1], [2]より，

$$\alpha\beta=-3,\ \alpha+\beta=-\frac{1}{6}$$

となる他なく，①の第 1 式より

$$a=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

と求まる。

11

ネノ	25

[解説]

α，β，γ は 3 次方程式 $x^3-x^2-4x-1=0$ の解であるから，3 次方程式における解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=1$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$$
$$\alpha\beta\gamma=1$$

である。これを用いると

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)$$
$$=\alpha\beta\gamma+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}$$
$$=\alpha\beta\gamma+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left\{+(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right\}$$
$$=\alpha\beta\gamma+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left\{+(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\right\}$$
$$=1+\left\{+1^2-2\cdot(-4)+(-4)^2-2\cdot1\cdot1\right\}$$
$$=25$$

と求まる。

12

ハヒ -1 フ 2

[解説]

$t-\sqrt{2-\frac{4}{3}x}$ は x の増加関数であり，$0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$，$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ において

$$t-\sqrt{2-\frac{4}{3}x}=0$$
$$\Leftrightarrow t^2=2-\frac{4}{3}x$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}t^2$$

であるから，$t-\sqrt{2-\frac{4}{3}x}$ の符号は $x=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}t^2$ を境に変化する。したがって

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\left|t-\sqrt{2-\frac{4}{3}x}\right|dx=\int_0^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}t^2}\left(\sqrt{2-\frac{4}{3}x}-t\right)dx+\int_{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}t^2}^{\frac{3}{2}}\left(t-\sqrt{2-\frac{4}{3}x}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}-tx\right]_0^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}t^2}+\left[\frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}+tx\right]_{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}t^2}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+\sqrt{2}$$

のように計算できる。これを $f(t)$ と置く。このとき

$$f'(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

であり，$1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ であることから，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(t)$		↘		↗	

したがって $f(t)$ は $t=1$ のときに最小となり，最小値は

$$f(1)=-1+\sqrt{2}$$

となる。

13

ヘホ	16

[解説]

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=1$$

ここで $\mathrm{BD}:\mathrm{DA}=1:1$ かつ $\mathrm{AC}:\mathrm{CE}=3:2$ であるので

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=\frac{2}{3}$$

すなわち，$\mathrm{EF}:\mathrm{FB}=2:3$ である。ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{BCE}$，$\triangle\mathrm{CEF}$ の面積をそれぞれ S_1，S_2，S とする。$\triangle\mathrm{BCE}$，$\triangle\mathrm{CEF}$ の高さが共通であるから，$\mathrm{EF}:\mathrm{FB}=2:3$ より

$$\begin{aligned}S&=\frac{2}{2+3}S_2\\&=\frac{2}{5}S_2\end{aligned}$$

である。同様にして，$\mathrm{AC}:\mathrm{CE}=3:2$ であるので

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{2}{1+2}S_1\\&=\frac{2}{3}S_1\end{aligned}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}S&=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}S_1\\&=\frac{4}{15}S_1\end{aligned}$$

と表せる。

点Aから線分BCに下ろした垂線の足をHとすると，$\triangle\mathrm{ABH}$ に関する三平方の定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}\\&=\sqrt{13^2-\left(\frac{10}{2}\right)^2}\\&=12\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\cdot10\cdot12\\&=60\end{aligned}$$

となる。以上より求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{4}{15}\cdot60\\&=16\end{aligned}$$

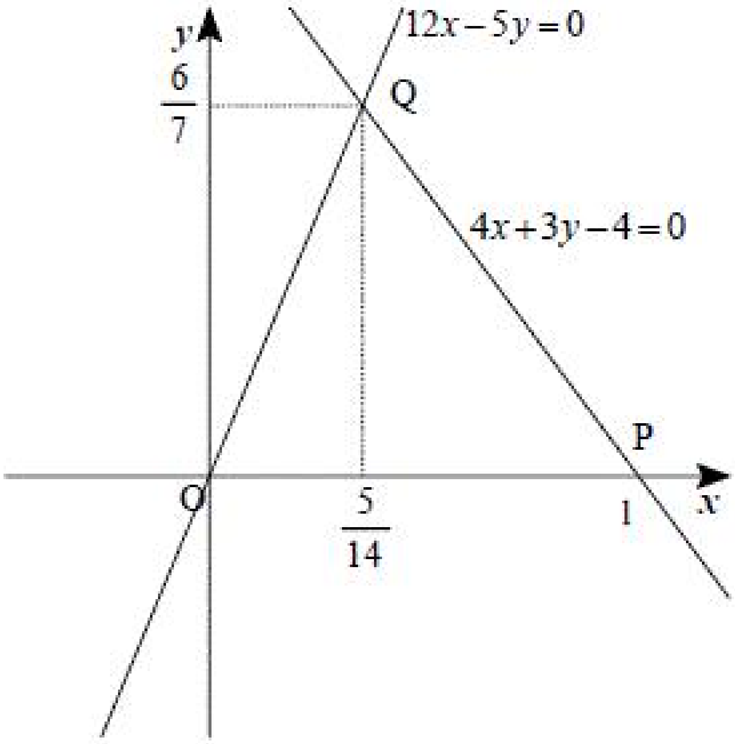
となる。

14

$\boxed{マ}$ 3 $\boxed{ミ}$ 7

[解説]

下図のように 2 点 P,Q をとる。



△OPQ の内心を $\mathrm{I}(a,\ b)$ とする。内心円は x 軸に接するのでその半径は b である。したがって

△OPQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{6}{7}$$
$$=\frac{3}{7}$$

$$S=\frac{1}{2}b(\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}+\mathrm{PQ})$$
$$=\frac{1}{2}b\left(1+\sqrt{\left(\frac{5}{14}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{5}{14}-1\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}b$$

の 2 通りに表せるので，

$$b=\frac{2}{7}$$

と求まる。直線 $12x-5y=0$ と内心 $\mathrm{I}\left(a,\ \frac{2}{7}\right)$ の距離は $\frac{2}{7}$ であるので，点と直線の距離の式は

$$\frac{\left|12a-5\cdot\frac{2}{7}\right|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{2}{7}$$
$$\Leftrightarrow |42a-5|=13$$

となる。これを解くと

$$a=\frac{3}{7},\ -\frac{4}{21}$$

となるが，内心は△OPQ の内部に存在するので，$0<a<1$ である。したがって，

$$a=\frac{3}{7}$$

である。

15

ムメモ　745

[解説]

求める和は

$$\sum_{k=1}^{50}\left[\frac{3}{5}k\right]=\sum_{m=0}^{9}\left\{\left[\frac{3}{5}+3m\right]+\left[\frac{6}{5}+3m\right]+\left[\frac{9}{5}+3m\right]+\left[\frac{12}{5}+3m\right]+\left[3+3m\right]\right\}$$

と変形できる。任意の自然数 n と実数 r に対して $[n+r]=[r]+n$ であるから，求める和は

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{9}\left\{\left[\frac{3}{5}+3m\right]+\left[\frac{6}{5}+3m\right]+\left[\frac{9}{5}+3m\right]+\left[\frac{12}{5}+3m\right]+\left[3+3m\right]\right\}\\&=\sum_{m=0}^{9}\left\{\left[\frac{3}{5}\right]+\left[\frac{6}{5}\right]+\left[\frac{9}{5}\right]+\left[\frac{12}{5}\right]+3+5\cdot 3m\right\}\\&=\sum_{m=0}^{9}(15m+7)\\&=15\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10+7\cdot 10\\&=745\end{aligned}$$

である。