

1

【解答】

アイウ 171

【解説】

x^9-1 を $x+1$ で割った余りは、剰余定理より $(-1)^9-1=-2$ となる。よって

$$x^9-1=(x+1)P(x)-2$$

となる。また、 $P(x)$ を $x-2$ で割った余りは剰余定理より $P(2)$ となるから

$$2^9-1=3 \cdot P(2)-2$$

$$\therefore P(2)=171$$

と求まる。

【解答】

エ 8 オカ 13

【解説】

104, $5x$, x^2 がある三角形の 3 辺の長さとなるための必要十分条件は以下の 4 つの不等式が成り立つことである。

$$104 + 5x > x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$5x + x^2 > 104 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$x^2 + 104 > 5x \quad \dots \textcircled{3}$$

$$104 > 0 \text{ かつ } 5x > 0 \text{ かつ } x^2 > 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

①から

$$104 + 5x > x^2$$

$$\Leftrightarrow (x-13)(x+8) < 0$$

$$\therefore -8 < x < 13$$

となり、②から

$$5x + x^2 > 104$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-8) > 0$$

$$\therefore x > 8, x < -13$$

となる。また、③から

$$x^2 + 104 > 5x$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{391}{4} > 0$$

となるが、この不等式は常に成立する。さらに④から

$$x > 0$$

となるから、すべての不等式の共通部分をとって、求める条件は

$$8 < x < 13$$

となる。

【解答】

キ 5 ク 6

【解説】

与式から

$$\cos \theta = 5 - 7 \sin \theta$$

である。この式を $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入することによって、

$$(5 - 7 \sin \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow 25 \sin^2 \theta - 35 \sin \theta + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5 \sin \theta - 3)(5 \sin \theta - 4) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

となる。これと $\cos \theta = 5 - 7 \sin \theta$ から

$$(\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right)$$

となるが、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ であることによって $0 \leq \sin \theta, \cos \theta \leq 1$ を満たさねばならないから

$$(\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{5}} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

と求まる。

【解答】

ケ 3 コ 5

【解説】

$EP = x (> 0)$ とおくと

$$\tan \angle EPA = \frac{5}{x}, \tan \angle EPB = \frac{9}{x}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \tan \angle APB &= \tan (\angle EPB - \angle EPA) \\ &= \frac{\frac{9}{x} - \frac{5}{x}}{1 + \frac{5}{x} \cdot \frac{9}{x}} \\ &= \frac{4x}{x^2 + 45} \\ &= \frac{4}{x + \frac{45}{x}} \end{aligned}$$

となる。 $x + \frac{45}{x}$ について、 $x > 0$ であるので相加平均と相乗平均の大小関係より

$$x + \frac{45}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{45}{x}} = 6\sqrt{5}$$

となる。等号成立条件は

$$\begin{aligned} x &= \frac{45}{x} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 45 \\ \therefore x &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\angle APB$ について

$$\begin{aligned} \angle BAP &= \angle AED + \angle EDA \\ &= 90^\circ + \angle EDA \\ &> 90^\circ \end{aligned}$$

より、 $0 < \angle APB < 90^\circ$ を満たすから、 $x + \frac{45}{x}$ が最小となるとき $\tan \angle APB$ は最大となり、

$\angle APB$ も最大となる。このときの EP の長さは $3\sqrt{5}$ である。また、このとき点 C と点 D は相異なる点であることから、方べきの定理より

$$\begin{aligned} EA \cdot EB &= ED \cdot EC \\ \Leftrightarrow 45 &= ED \cdot EC \\ \therefore ED &< 3\sqrt{5} < EC \end{aligned}$$

となり、 $EP = 3\sqrt{5}$ において

$$ED < EP < EC$$

を満たすから、点 P が線分 CD 上に存在することが分かる。

【解答】

サ 8 シス 27

【解説】

$\sum_{k=0}^2 P(2, k)$ は x 軸方向に 2 だけ動く確率の総和となる。よって、これはサイコロを 4 回振ったうち 1 または 2 の目が 2 回出て、それ以外の目が 2 回出る確率であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^2 P(2, k) &= {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 6 \cdot \frac{4}{3^4} \\ &= \frac{8}{27}\end{aligned}$$

となる。

【解答】

セソ 43 タ 8

【解説】

問題文における数列は

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{9}{10}, \frac{9}{8}, \dots\right), \dots$$

のような群数列と見なすことができるから、

$$\left(\frac{2k-1}{2k}, \frac{2k-1}{2(k-1)}, \dots, \frac{2k-1}{2}\right)$$

を第 k 群と表すと第 k 群は k 個の要素によって構成される数列となる。よって第 k 群までの項数の和は

$$\sum_{l=1}^k l = \frac{1}{2}k(k+1)$$

となる。ここで

$$\frac{1}{2}21 \cdot (21+1) = 231 (< 250)$$

$$250 - 231 = 19 (< 22)$$

であることに注意すると、問題文での数列の第 250 項は第 22 群の第 19 項となることがわかる。よってその値は

$$\frac{2 \cdot 22 - 1}{2 \cdot (22 - 18)} = \frac{43}{8}$$

となる。

【解答】

チツテ 149

【解説】

2項定理から $(1-x)^5$ の展開式は

$$\sum_{i=0}^5 {}_5C_i \cdot 1^{5-i} \cdot (-x)^i \quad \dots \textcircled{1}$$

と表され、同様に $(1+y)^6$ の展開式は

$$\sum_{j=0}^6 {}_6C_j \cdot 1^{6-j} \cdot y^j \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、多項定理より $\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^7$ の展開式は

$$\sum_{p+q+r=7} \frac{7!}{p!q!r!} 1^p \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^q \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^r \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで x^4y^5 の係数を考えるから、①、②においてはそれぞれ x^4, x^5, y^5, y^6 の係数を考えればよく、それぞれ

$${}_5C_4 \cdot (-x)^4 = 5x^4, {}_5C_5 \cdot (-x)^5 = -x^5, {}_6C_5 \cdot y^5 = 6y^5, {}_6C_6 \cdot y^6 = y^6$$

となる。また、③においては $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{xy}$ の係数を考えればよく、それぞれ

$$\frac{7!}{7!0!0!} \cdot 1^7 = 1, \frac{7!}{6!1!0!} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^1 = -\frac{7}{x}, \frac{7!}{6!0!1!} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^1 = \frac{7}{y}, \frac{7!}{5!1!1!} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^1 = -42$$

となる。以上より、与式における x^4y^5 の係数は

$$5x^4 \cdot 6y^5 \cdot 1 + (-x^5) \cdot 6y^5 \cdot \left(-\frac{7}{x}\right) + 5x^4 \cdot y^6 \cdot \left(\frac{7}{y}\right) + (-x^5) \cdot y^6 \cdot \left(-\frac{42}{xy}\right) = 149x^4y^5$$

より、

149

となる。

【解答】

ト 5 ナ 4

【解説】

与式において、真数は正であるから

$$z > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{x+y}{2} > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、与えられた関係式より

$$\begin{aligned} \log_4 z &= -\frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{\frac{x+y}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2 z}{\log_2 4} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{x+y}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \log_2 z &= -1 + \log_2 \left(\frac{x+y}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \log_2 z &= \log_2 \left(\frac{x+y}{4} \right) \\ \Leftrightarrow z &= \frac{x+y}{4} \\ \therefore x+y &= 4z \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となり、さらにもう一つの関係式より

$$\begin{aligned} 27^{xy-1} &= 3^{z+2xy+2} \\ \Leftrightarrow 3^{3xy-3} &= 3^{z+2xy+2} \\ \Leftrightarrow 3xy-3 &= z+2xy+2 \\ \therefore xy &= z+5 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、①かつ②かつ③かつ④を満たす実数 x, y が存在するための必要十分条件は、解と係数の関係から、 t に関する 2 次方程式

$$t^2 - 4zt + (z+5) = 0$$

の解が存在し、かつ $z > 0$ を満たすことであり、それはこの 2 次方程式の判別式 D を用いて

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &\geq 0 \quad \text{かつ} \quad z > 0 \\ \Leftrightarrow (2z)^2 - (z+5) &\geq 0 \quad \text{かつ} \quad z > 0 \\ \Leftrightarrow 4z^2 - z - 5 &\geq 0 \quad \text{かつ} \quad z > 0 \\ \Leftrightarrow (4z-5)(z+1) &\geq 0 \quad \text{かつ} \quad z > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore z \geq \frac{5}{4}$$

と求まる。

【解答】

ニ 9 ヌ 6

【解説】

与えられた関数 $f(n)$ を変形すると,

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \log_e({}_{2n}C_n) + n \left\{ 1 - \log_e \left(\frac{n}{4!} \right) \right\} + \log_e(n!) \\
 &= \log_e({}_{2n}C_n) + n - \log_e n^n + n \log(4!) + \log_e(n!) \\
 &= \log_e \left(\frac{{}_{2n}C_n \cdot n!}{n^n} \right) + n + n \log(4!) \\
 &= \sum_{k=1}^n \log_e \left(\frac{n+k}{n} \right) + n(1 + \log_e 4!)
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log_e \left(\frac{n+k}{n} \right) + 1 + \log_e 4! \right\} \\
 &= \int_0^1 \log_e(1+x) dx + 1 + \log_e 24 \\
 &= \left[(1+x) \log_e(1+x) - x \right]_0^1 + 1 + \log_e 24 \\
 &= \log_e 4 + \log_e 24 \\
 &= \log_e 96
 \end{aligned}$$

となり

$$e^x = 96$$

となる。

【解答】

ネ 9 ノ 4

【解説】

関数 $g(x) = x^3$ を定義する。これを用いて与えられた式を変形すると、

$$\frac{1}{h} \left\{ \frac{f(2+h)}{f(2-h)} - \left(\frac{3-h}{3+h} \right)^3 \right\} = \frac{1}{f(2-h)g(3+h)} \left\{ \frac{f(2+h)g(3+h) - f(2-h)g(3-h)}{h} \right\}$$

となる。ここでさらに $F(x) = f(2+x)g(3+x)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h)g(3+h) - f(2-h)g(3-h)}{h} &= \frac{F(h) - F(-h)}{h} \\ &= \frac{F(h) - F(0)}{h} + \frac{F(-h) - F(0)}{-h} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(2+h)}{f(2-h)} - \left(\frac{3-h}{3+h} \right)^3 \right\} = \frac{2F'(0)}{f(2)g(3)}$$

であり、 $F(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(2+x)g(3+x) + f(2+x)g'(3+x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4+x}} \cdot (3+x)^3 + \sqrt{4+x} \cdot 3(3+x)^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{2F'(0)}{f(2)g(3)} = \frac{2\left(\frac{27}{4} + 54\right)}{2 \cdot 27} = \frac{9}{4}$$

となる。

11

【解答】

ハ 2 ヒ 2

【解説】

$x=k$ と固定する。 y が存在するための k の範囲は $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq k \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ である。このとき

$$\frac{y}{(k-2)^2}$$

の最大値を求めればよいが、 $x=k$ と固定したとき y の動く範囲は

$$-\sqrt{\frac{3}{2}-k^2} \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}-k^2}$$

であるから、 $y = \sqrt{\frac{3}{2}-k^2}$ で最大値をとる。このとき、

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}-k^2}}{(k-2)^2}$$

の最大値を求めればよいが、これは常に正であるであるから 2 乗して

$$f(k) = \frac{\frac{3}{2}-k^2}{(k-2)^4}$$

の最大値を考えればよいことになる。これを k について微分すると

$$\begin{aligned} f'(k) &= \frac{(-2k)(k-2)^4 - \left(\frac{3}{2}-k^2\right) \cdot 4(k-2)^3}{(k-2)^8} \\ &= \frac{2(k+3)(k-1)}{(k-2)^5} \end{aligned}$$

となるから、 $f(k)$ の増減表は以下のようになる。

k	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	...	1	...	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$f'(k)$		+	0	-	
$f(k)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘	

よって $x=1$ のときに求める最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

【解答】

$$7 \leq 1$$

【解説】

$ad - bc = k \ (k \neq 0)$ とおくと

$$A^{-1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} A - A^{-1} &= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \frac{1}{k} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ka - d = -3k \\ kb + b = 6k \\ kc + c = 6k \\ kd - a = 3k \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

$$ka - d = -3k, \quad kd - a = 3k$$

から

$$\begin{aligned} ka - d + kd - a &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)(a+d) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $a > 0, d > 0$ であるから

$$k = 1 \quad (\because k \neq 0 \text{ を満たす})$$

となる。これと $kb + b = 6k, kc + c = 6k$ から

$$b = c = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $ka - d = -3k, kd - a = 3k$ から

$$a - d = -3 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①から

$$\begin{aligned} ad - bc &= 1 \\ \Leftrightarrow ad &= 10 \end{aligned}$$

となる。よって、これと②から

$$\begin{aligned} (a+d)^2 &= (a-d)^2 + 4ad \\ &= 49 \end{aligned}$$

となる。ここで $a > 0, d > 0$ であるから

$$a + d = 7$$

となる。

【解答】

ホ 4 マ 3 ミ 3 ム 4

【解説】

まず,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$$

とおき, また s, t を実数として

$$\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$$

とおく。ここで $|\overrightarrow{b}| = 3, |\overrightarrow{c}| = 4$ であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CB}|^2 &= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|^2 \\ \Leftrightarrow 13 &= |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{b}|^2 - 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + |\overrightarrow{c}|^2 &= 13 \\ \therefore \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} &= 6 \end{aligned}$$

となる。この条件と $CD = BD = \sqrt{13}$ を用いると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CD}|^2 &= |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}|^2 \\ \Leftrightarrow 13 &= |s\overrightarrow{b} + (t-1)\overrightarrow{c}|^2 \\ \Leftrightarrow s^2|\overrightarrow{b}|^2 + 2s(t-1)\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + (t-1)^2|\overrightarrow{c}|^2 &= 13 \\ \therefore 9s^2 + 12s(t-1) + 16(t-1)^2 &= 13 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり, 辺 BD について同様にして

$$9(s-1)^2 + 12t(s-1) + 16t^2 = 13 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。①と②の差から

$$\begin{aligned} 6s - 20t + 7 &= 0 \\ \therefore s &= \frac{20t-7}{6} \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{20t-7}{6}\right)^2 + 12\left(\frac{20t-7}{6}\right)(t-1) + 16(t-1)^2 &= 13 \\ \Leftrightarrow (20t-7)^2 + 8(20t-7)(t-1) + 64(t-1)^2 &= 52 \\ \Leftrightarrow 624t^2 - 624t + 117 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16t^2 - 16t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4t-3)(4t-1) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。これと $s = \frac{20t-7}{6}$ から

$$(s, t) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

となる。ここで正三角形 BCD は三角形 ABC の外側につくるから

$$s+t > 1$$

が成り立つ。よって

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

となる。

【解答】

メ 5 モ 4

【解説】

$$f(x) = x^2 - 4 - (x-2) \int_{-2}^2 \frac{1}{4} |f(t)| dt$$

となるため k を定数とし、

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{4} |f(t)| dt = k$$

とおく。すると

$$k \geq 0$$

となり

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4 - k(x-2) \\ &= x^2 - kx + 2(k-2) \\ &= (x-2)\{x-(k-2)\} \end{aligned}$$

となる。

[1] $0 \leq k < 4$ のとき

$$f(x) \geq 0$$

となるのは

$$x \geq 2, \quad x \leq k-2$$

のときであるので、 $0 \leq k < 4$ に注意すると

$$\int_{-2}^2 |f(t)| dt = 4k$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{k-2} f(t) dt + \int_{k-2}^2 (-f(t)) dt = 4k$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{t^3}{3} - \frac{k}{2} t^2 + (2k-4)t \right]_{-2}^{k-2} - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{k}{2} t^2 + (2k-4)t \right]_{k-2}^2 = 4k$$

$$\Leftrightarrow 2 \left\{ \frac{(k-2)^3}{3} - \frac{k}{2} (k-2)^2 + (2k-4)(k-2) \right\} + 2 \left\{ \frac{k}{2} \cdot 2^2 \right\} = 4k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} (k-2)^2 \{2(k-2) - 3k + 12\} + 4k = 4k$$

$$\Leftrightarrow (k-2)^2 (8-k) = 0$$

$$\therefore k = 2$$

となる。

[2] $k \geq 4$ のとき

$-2 \leq x \leq 2$ において常に

$$f(x) \geq 0$$

となるので

$$\int_{-2}^2 |f(t)| dt = 4k$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{t^3}{3} - \frac{k}{2} t^2 + (2k-4)t \right]_{-2}^2 = 4k$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot (2k-4) \cdot 2 = 4k$$

$$\Leftrightarrow 8k - \frac{32}{3} = 4k$$

$$\therefore k = \frac{8}{3}$$

となる。これは $k \geq 4$ を満たさない。

以上[1], [2]より

$$k = 2$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

ヤ 2 ユヨ 39

【解説】

この双曲線関数は x 軸に関して対称であるので接点の y 座標が 0 以上の場合のみ考えてよい。

そこで接点の座標を

$$(x_1, y_1) \quad (y_1 \geq 0)$$

とおく。すると、接線 l の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。これが $(\sqrt{2}, 0)$ を通るから

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{a^2} x_1 &= 1 \\ \therefore x_1 &= \frac{a^2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。また、接点 (x_1, y_1) は双曲線 $m: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上にあり、 $y_1 \geq 0, b > 0$ から

$$y_1 = b \sqrt{\frac{a^2 - 2}{2}}$$

となる。よって、接線 l の方程式は

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - 2}{2b^2}} y = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで双曲線 m の漸近線の方程式は

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

となるので、 $y = \frac{b}{a} x$ と②の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - 2}{2b^2}} \cdot \frac{b}{a} x &= 1 \\ \Leftrightarrow x \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right)} \\ \therefore x &= a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \end{aligned}$$

となる。これと $y = \frac{b}{a} x$ から交点の座標は

$$\left(a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right), ab \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \right)$$

となる。次に $y = -\frac{b}{a} x$ と②の交点の座標は同様にして

$$\left(a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right), -ab \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \right)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} P &\left(a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right), ab \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \right) \\ Q &\left(a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right), -ab \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} OP &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \\ OQ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} OP \cdot OQ &= 15 \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2) a^2 \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} \right) \right\} &= 15 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 15 \end{aligned}$$

となる。次に $\triangle OPQ$ の面積について $a > 0, b > 0$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\left| a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \cdot (-ab) \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - a^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) ab \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2}} \right) \right| = 3\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &|-ab - ab| = 3\sqrt{6} \\ \therefore ab &= 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= 15 + 6\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow a+b &= \sqrt{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \quad (\because a > 0, b > 0) \\ \therefore a+b &= 3 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

となり、 $b > a$ であるため

$$\begin{aligned} (b-a)^2 &= 15 - 6\sqrt{6} \\ \therefore b-a &= 3 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。よって

$$a = \sqrt{6}, b = 3$$

となる。よって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left\{ 6 \cdot 2 \left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \right) \right\}^2 + \left\{ 3\sqrt{6} \cdot 2 \left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \right) \right\}^2 \\ \Leftrightarrow PQ^2 &= 48 + 108 \\ \therefore PQ &= 2\sqrt{39} \end{aligned}$$

となる。