

[解答]

ア 2 イ 3

[解説]

三角関数は 2π で1周期なので、周期を a とすると a は n を任意の整数として

$$5\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=5\sin\left\{\frac{\pi}{2}-3(x+a)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\left\{\frac{\pi}{2}-3(x+a)\right\}=2n\pi$$

$$\Leftrightarrow 3a=2n\pi$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}n\pi$$

を満たす。よって求める正で最小の周期 a は $n=1$ のときの $\frac{2}{3}\pi$ である。

[解答]

ウ 9 エ 1 オ 3 カ 6

[解説]

一般に、 $X = n (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ となるのは、両方が n 、または片方が n でもう片方が $n+1$ 以上 6 以下となる場合なので、 $X = n$ となる事象の数は

$$1 + 2\{6 - (n+1) + 1\} = 13 - 2n$$

より $13 - 2n$ 個である。事象の総数は $6^2 = 36$ 個なので、求める期待値は

$$\frac{\sum_{n=1}^6 n(13-2n)}{36} = \frac{91}{36}$$

である。

〔解答〕

キ 2 ク 1 ケ 3 コ 2

〔解説〕

$$f^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 0 - (-1)(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

および

$$g^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - (-1)(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

より、

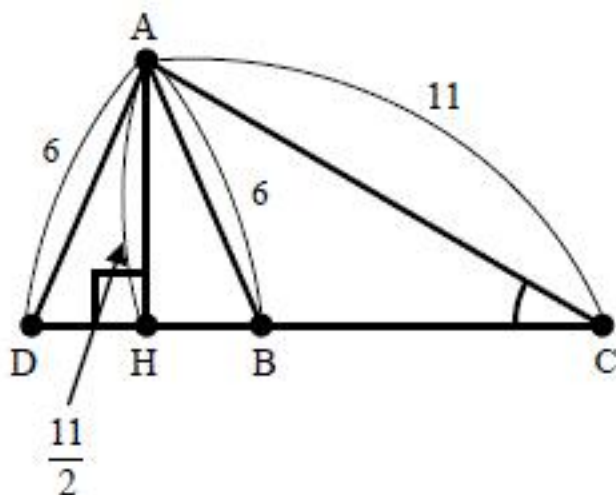
$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

〔解答〕

サ 2 シ 3

〔解説〕



点Aから直線CDに下ろした垂線の足を点Hとする。このとき、

$$AH = CA \sin 30^\circ = \frac{11}{2}$$

より、三平方の定理から

$$\begin{aligned} \text{BH} &= \text{DH} \\ &= \sqrt{6^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{23}}{2} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} BD &= BH + DH \\ &= \sqrt{23} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

ス 8 セ 7

〔解説〕

$$3a - 2b - c = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2a - b - 2c = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

とすると、 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ より、

$$-a + 3c = 3$$

$$a = 3c - 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

であり、 $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \times 3$ より

$$-b + 4c = 6$$

$$b = 4c - 6 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より、 c が整数のとき a, b も整数であり、

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3c - 3 + 4c - 6 + c \\ &= 8c - 9 \end{aligned}$$

となるので、 $c = k + 2$ とすると k も整数であり、

$$a + b + c = 8k + 7$$

と表せる。

[解答]

ソ 2 タ 2 チ 7

[解説]

$\log_2 x = a$ とおく。 $x=1$ のとき $a=0$ 、 $x=4$ のとき $a=2$ であり、対数関数は連続関数なので $1 \leq x \leq 4$ のとき $0 \leq a \leq 2$ である。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\log_2 \frac{2}{x} \right) \left(\log_2 \frac{x}{4} \right) \left(\log_4 \frac{4}{x} \right) \\ &= (1 - \log_2 x)(\log_2 x - 2)(1 - \log_4 x) \\ &= (1 - a)(a - 2) \left(1 - \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a - 1)(a - 2)^2 \end{aligned}$$

である。 $g(a) = \frac{1}{2}(a - 1)(a - 2)^2$ とおくと、

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{2} \{ (a - 2)^2 + 2(a - 1)(a - 2) \} \\ &= \frac{1}{2}(a - 2)(3a - 4) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} g'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

なので、増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2
$g'(a)$	+	+	0	-	0
$g(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって $a = \frac{4}{3}$ のとき最大値をとり、このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \left(\frac{4}{3} - 2 \right)^2 \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ツ 6 テ 4

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 104^{12} &= (98+6)^{12} \\
 &= \sum_{n=0}^{12} {}_{12}C_n \cdot 98^n \cdot 6^{(12-n)} \\
 &= \sum_{n=1}^{12} {}_{12}C_n \cdot 98^n \cdot 6^{(12-n)} + 6^{12}
 \end{aligned}$$

であり、 $\sum_{n=1}^{12} {}_{12}C_n \cdot 98^n \cdot 6^{(12-n)}$ は 98 の倍数なので 104^{12} を 98 で割った余りは 6^{12} を 98 で割った余りと同じである。

$$\begin{aligned}
 6^{12} &= (6^3)^4 \\
 &= 216^4 \\
 &= (98 \cdot 2 + 20)^4 \\
 &= \sum_{n=1}^4 {}_4C_n \cdot (98 \cdot 2)^n \cdot 20^{(4-n)} + 20^4 \\
 &= \sum_{n=1}^4 {}_4C_n \cdot (98 \cdot 2)^n \cdot 20^{(4-n)} + 400^2 \\
 &= \sum_{n=1}^4 {}_4C_n \cdot (98 \cdot 2)^n \cdot 20^{(4-n)} + (98 \cdot 4 + 8)^2 \\
 &= \sum_{n=1}^4 {}_4C_n \cdot (98 \cdot 2)^n \cdot 20^{(4-n)} + (98 \cdot 4)^2 + 2 \cdot 8 \cdot (98 \cdot 4) + 8^2
 \end{aligned}$$

であり、最後の式の 8^2 以外は 98 の倍数なので、 6^{12} を 98 で割った余りは $8^2 = 64$ である。よって 104^{12} を 98 で割った余りは 64 である。

[解答]

$$ト \quad 2 \quad ナ \quad - \quad ニ \quad 3$$

[解説]

$f(x)$ の次数を n とおくと、与式の左辺の次数は $2n$ であり、右辺の次数は $2+n$ なので、

$$2n = 2 + n$$

$$\Leftrightarrow n = 2$$

より $f(x)$ の次数は 2 である。したがって $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおける。これを代入すると、

$$ax^4 + bx^2 + c = x^2 \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} - 2x^3 - 5$$

$$\Leftrightarrow ax^4 + bx^2 + c = ax^4 + (b-2a-2)x^3 + (a-b+c)x^2 - 5$$

であり、係数比較すると

$$a = a$$

$$0 = b - 2a - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b = a - b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c = -5 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。③を②に代入し、

$$0 = a - 2b - 5 \quad \dots \textcircled{4}$$

となるので、①×2+④より、

$$0 = -3a - 9$$

$$\Leftrightarrow a = -3$$

となる。

[解答]

ヌ 1 ネ 0 ノ 2

[解説]

漸化式より、ある2以上の自然数 n について $a_n = 0$ のとき、

$$(2n-1)0 \cdot a_{n-1} = 5(0 - a_{n-1})$$

$$\therefore a_{n-1} = 0$$

となり、同様に $a_{n-2} = 0, \dots, a_1 = 0$ となるが、これは仮定に反する。よって任意の n について $a_n \neq 0$ となるので、 $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、

$$b_1 = 2014$$

であり、

$$(2n-1)\frac{1}{b_{n+1}b_n} = 5\left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow (2n-1) = 5(b_n - b_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = -\frac{2n-1}{5}$$

が成り立つ。したがって、

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} - b_k = \sum_{k=1}^{n-1} -\frac{2k-1}{5}$$

$$\Leftrightarrow b_n - b_1 = -\frac{(n-1)n - (n-1)}{5}$$

$$\Leftrightarrow b_n = 2014 - \frac{(n-1)^2}{5}$$

である。 $a_n < 0 \Leftrightarrow b_n < 0$ なので、

$$b_n < 0$$

$$\Leftrightarrow 2014 - \frac{(n-1)^2}{5} < 0$$

$$\Leftrightarrow 10070 < (n-1)^2$$

であり、 $100^2 = 10000$ および $101^2 = 10201$ なので条件を満たす最小の n は

$$n-1 = 101$$

$$\Leftrightarrow n = 102$$

より102である。

〔解答〕

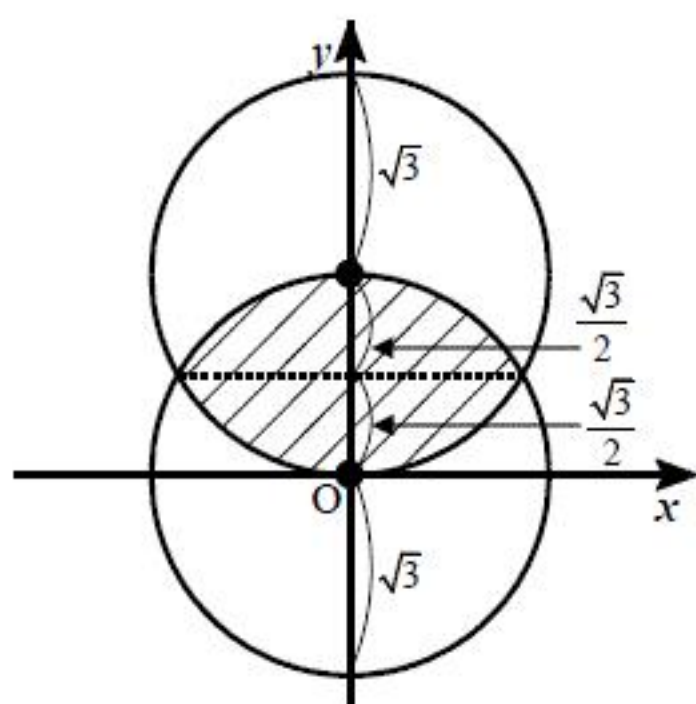
ハ 5 ヒ 3 フ 4

〔解説〕

2つの球面はそれぞれ中心が $(1, 1, 0)$ および $(0, 0, 1)$ であるため、2点間の距離は

$$\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3}$$

である。2つの球はともに半径は $\sqrt{3}$ であるため、一方の円の中心が原点に、もう一方の円の中心が y 軸上になるよう2つの球を平行移動、回転させると、位置関係は以下の図のようになる。



前図の斜線部が共通部分であり、共通部分を点線で2つの立体に分けたとき、その2つの立体は合同である。その立体の上半分を前図における $y = k$ で切ったときの断面積は

$$\pi \left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 - k^2} \right)^2 = \pi(3 - k^2)$$

であるため、体積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \pi(3 - k^2) dk &= \pi \left[3k - \frac{1}{3}k^3 \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= \pi \left[\left\{ 3\sqrt{3} - \frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 \right\} - \left\{ 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right\} \right] \\ &= \pi \left(2\sqrt{3} - \frac{11\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{8} \pi \end{aligned}$$

である。この図形が2つあるため、求める面積は

$$\frac{5\sqrt{3}}{8} \pi \cdot 2 = \frac{5\sqrt{3}}{4} \pi$$

である。

〔解答〕

へ 8 ホ 1 マ 5

〔解説〕

$$\frac{dx}{dt} = 2(1-t)$$

より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (2-t)^2 - 2t(2-t) \\ &= 3t^2 - 8t + 4 \\ &= (3t-2)(t-2)\end{aligned}$$

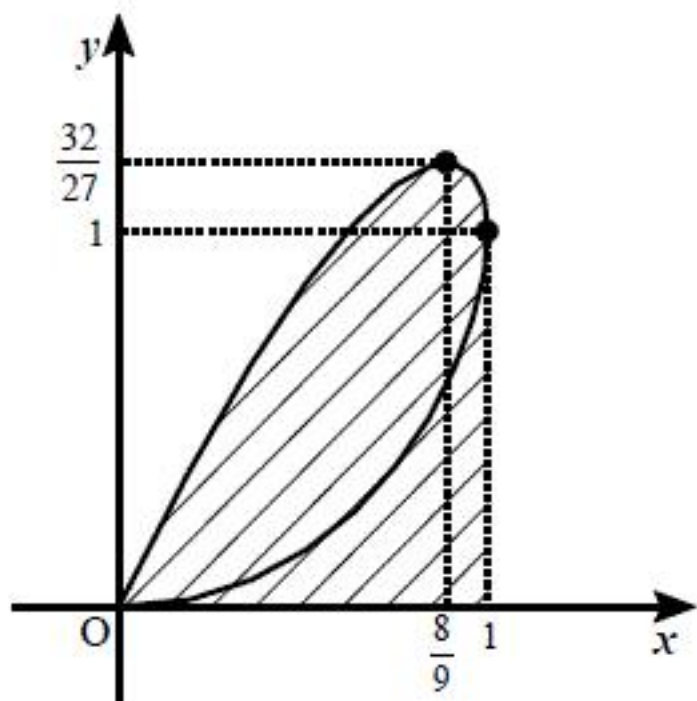
より

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 2, \frac{2}{3}\end{aligned}$$

なので、増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1	...	2
$\frac{dx}{dt}$	+	+	+	+	0	-	-
x	0	↗	$\frac{8}{9}$	↗	1	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	-	-	-	0
y	0	↗	$\frac{32}{27}$	↘	1	↘	0

したがって図は以下のようになる。



求める面積は図の斜線部からそのうち曲線 C で囲まれていない部分を引いたものと考えられる。 $dx = 2(1-t)dt$ より、前者の面積は

$$\int_0^1 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) dt$$

であり、後者の面積は

$$\int_2^1 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) dt$$

であるから、求める面積は

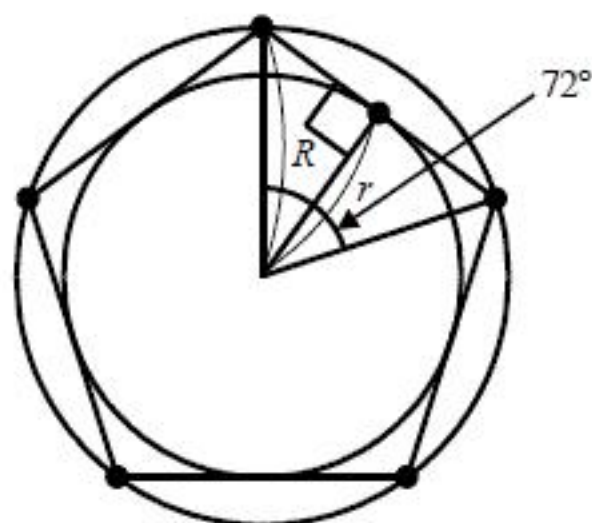
$$\begin{aligned}\int_0^1 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) dt - \int_2^1 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) dt &= \int_0^2 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) dt \\ &= -2 \int_0^2 (t^4 - 5t^3 + 8t^2 - 4t) dt \\ &= -2 \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{5}{4}t^4 + \frac{8}{3}t^3 - 2t^2 \right]_0^2 \\ &= -2 \left(\frac{32}{5} - 20 + \frac{64}{3} - 8 \right) \\ &= -2 \left(-\frac{8}{5} + \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

となる。

[解答]

ミ 1 ム 5 メ 4

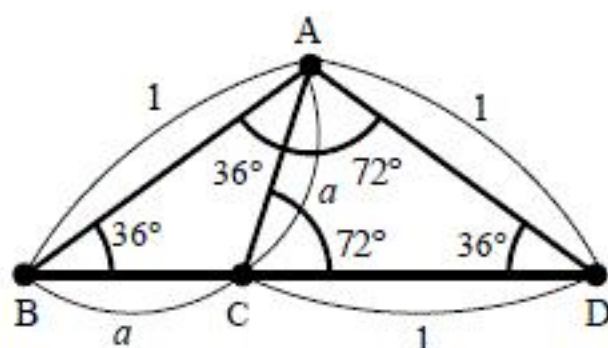
[解説]



図より,

$$R \cos \frac{72^\circ}{2} = r$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} = \cos 36^\circ$$

である。 $\cos 36^\circ$ を求めるため、以下の図を考える。 $AB = AD = CD = 1$, $AC = BC = a$ とすると, $\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ は相似なので,

$$AB : BC = BD : AB$$

$$\Leftrightarrow 1 : a = 1 + a : 1$$

$$\Leftrightarrow a(1 + a) = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であり, $a > 0$ より $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ である。点 A から線分 BD に下した垂線の足を H とすると,

$$AD = AH + HD$$

$$\Leftrightarrow 1 + a = \cos 36^\circ + \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow 1 + a = 2 \cos 36^\circ$$

$$\Leftrightarrow \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

となる。よって $\frac{r}{R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ である。

【解答】

モ 1 ヤ 5 ユ 2

【解説】

与式を x について整理すると、

$$\begin{aligned}
 & x^4(a^2-3a+2)+2x(a-1)+3(a^2-3a+2)>0 \\
 & \Leftrightarrow (a-1)\{x^4(a-2)+2x+3(a-2)\}>0 \\
 & \Leftrightarrow (a-1)\{(x^4+3)(a-2)+2x\}>0
 \end{aligned}$$

となる。また、 $x=0$ のとき、

$$\begin{aligned}
 & 3(a^2-3a+2)>0 \\
 & \Leftrightarrow (a-1)(a-2)>0 \\
 & \Leftrightarrow a<1, a>2
 \end{aligned}$$

となるため、任意の x で式が成り立つには $a<1, a>2$ が必要条件である。 $a<1$ の場合と、 $a>2$ の場合に場合分けする。

[1] $a<1$ の場合 $a-1<0$ のため、

$$\begin{aligned}
 & (a-1)\{(x^4+3)(a-2)+2x\}>0 \\
 & \Leftrightarrow (x^4+3)(a-2)+2x<0
 \end{aligned}$$

となる。 $f(x)=(x^4+3)(a-2)+2x$ とすると、 $f'(x)=4x^3(a-2)+2$ および $a-2<0$ より、

$$\begin{aligned}
 & f'(x)=0 \\
 & \Leftrightarrow 4x^3(a-2)+2=0 \\
 & \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}
 \end{aligned}$$

となるため増減表は以下のようになる。

x	...	$\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

ゆえに $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}$ のとき $f(x)<0$ となればよく、

$$\begin{aligned}
 & \left\{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}\right)^4+3\right\}(a-2)+2\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}<0 \\
 & \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}+3(a-2)+2\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}<0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}<3(2-a) \\
 & \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2(2-a)}}<2(2-a) \\
 & \Leftrightarrow 2(2-a)>1 \\
 & \Leftrightarrow a<\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

となり、 $a<1$ において常に成り立つ。

[2] $a>2$ の場合 $a-1>0$ のため、

$$\begin{aligned}
 & (a-1)\{(x^4+3)(a-2)+2x\}>0 \\
 & \Leftrightarrow (x^4+3)(a-2)+2x>0
 \end{aligned}$$

となる。 $f(x)=(x^4+3)(a-2)+2x$ とすると、 $f'(x)=4x^3(a-2)+2$ および $a-2>0$ より、

$$\begin{aligned}
 & f'(x)=0 \\
 & \Leftrightarrow 4x^3(a-2)+2=0 \\
 & \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}}
 \end{aligned}$$

となるため増減表は以下のようになる。

x	...	$-\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

ゆえに $x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}}$ のとき $f(x)>0$ となればよく、

$$\begin{aligned}
 & \left\{-\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}}+3\right\}(a-2)-2\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}}>0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}}+3(a-2)-2\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}}>0 \\
 & \Leftrightarrow 3(a-2)>\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}} \\
 & \Leftrightarrow 2(a-2)>\sqrt[3]{\frac{1}{2(a-2)}} \\
 & \Leftrightarrow 2(a-2)>1 \\
 & \Leftrightarrow a>\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

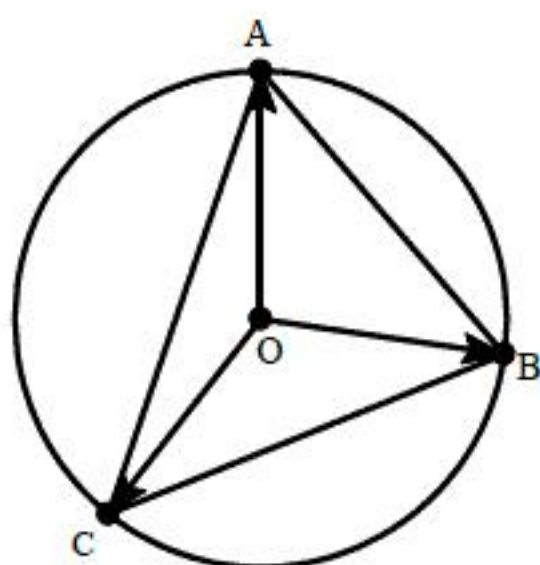
となる。

以上より、求める条件は $a<1, a>\frac{5}{2}$ である。

〔解答〕

ヨ 5 ラ 3 リ 7

〔解説〕



$$7\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} = -8\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{OA} + 8\overrightarrow{OC} = -5\overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC} = -7\overrightarrow{OA} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$ なので、①より、

$$\begin{aligned} |7\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}|^2 &= |-8\overrightarrow{OC}|^2 \\ \Leftrightarrow 7^2 + 5^2 + 70\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 8^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

となる。②より、

$$\begin{aligned} |7\overrightarrow{OA} + 8\overrightarrow{OC}|^2 &= |-5\overrightarrow{OB}|^2 \\ \Leftrightarrow 49 + 64 + 112\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 25 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{11}{14} \end{aligned}$$

となる。③より、

$$\begin{aligned} |5\overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC}|^2 &= |-7\overrightarrow{OA}|^2 \\ \Leftrightarrow 25 + 64 + 80\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 49 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$ であり、

$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

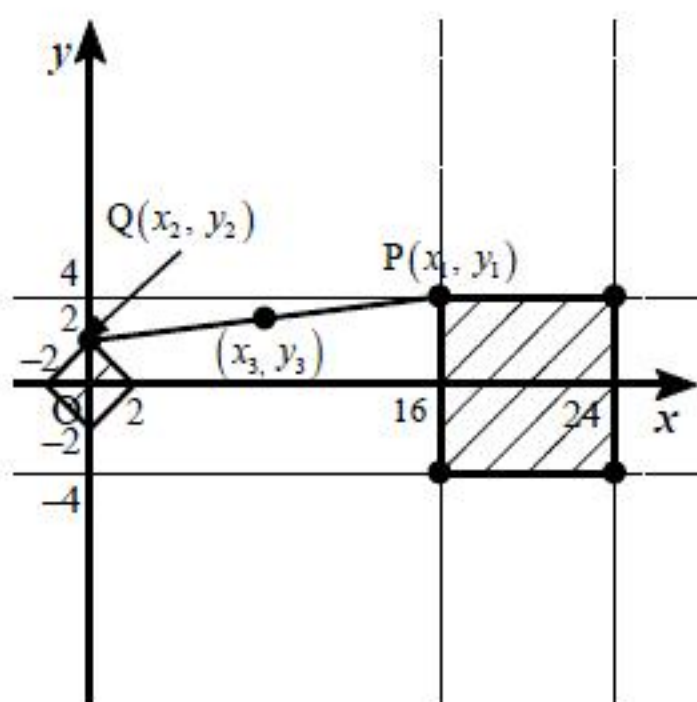
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sqrt{(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|)^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|)^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{14}\right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{28} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

より求める面積は $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ である。

【解答】

ル 3 レ 4

【解説】



$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ とすると,

$$\begin{aligned} |x_1 - 20| &\leq 4 \\ \Leftrightarrow 16 \leq x_1 \leq 24 &\quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

および

$$-4 \leq y_1 \leq 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

および

$$|x_2| + |y_2| \leq 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。線分 PQ の中点を (x_3, y_3) とすると,

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

および

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$

が成り立つ。③より,

$$-2 \leq x_2 \leq 2 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$-2 \leq y_2 \leq 2 \quad \dots \textcircled{7}$$

が成り立つので, ①, ⑥より

$$14 \leq x_1 + x_2 \leq 26$$

であるから, ④より

$$7 \leq x_3 \leq 13 \quad \dots \textcircled{8}$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2x_3 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 2x_3 - x_1 \\ \Leftrightarrow 2x_3 - 24 &\leq x_2 \leq 2x_3 - 16 \quad \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

となる。したがって $2x_3 - 24 \leq 0$ かつ $0 \leq 2x_3 - 16$ のとき, すなわち

$$8 \leq x_3 \leq 12$$

のときに $x_2 = 0$ をとれる。 $\dots \textcircled{10}$

ここで x_3 の値に応じて3通りに場合分けする。

[1] $7 \leq x_3 < 8$ の場合

⑨および $2x_3 - 16 \leq 0$ より $|x_2|$ の最小値は $-(2x_3 - 16)$ なので, ③より

$$|y_2| \leq 2 + 2x_3 - 16$$

$$\Leftrightarrow |y_2| \leq 2x_3 - 14$$

である。したがって, ②, ⑤より

$$\frac{-(2x_3 - 14) - 4}{2} \leq y_3 \leq \frac{2x_3 - 14 + 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x_3 + 5 \leq y_3 \leq x_3 - 5$$

である。

[2] $8 \leq x_3 \leq 12$ の場合

⑩より $x_2 = 0$ をとれるので, ③より

$$|y_2| \leq 2$$

である。したがって②, ⑤より

$$\frac{-2 - 4}{2} \leq y_3 \leq \frac{2 + 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq y_3 \leq 3$$

である。

[3] $12 \leq x_3 < 13$ の場合

⑨および $2x_3 - 24 \geq 0$ より $|x_2|$ の最小値は $2x_3 - 24$ なので, ③より

$$|y_2| \leq 2 - (2x_3 - 24)$$

$$\Leftrightarrow |y_2| \leq -2x_3 + 26$$

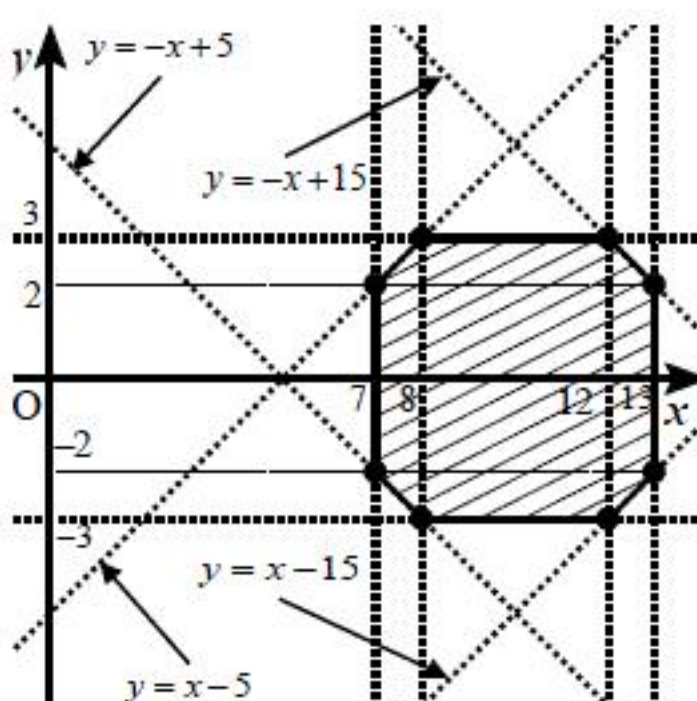
である。したがって, ②, ⑤より

$$\frac{-(-2x_3 + 26) - 4}{2} \leq y_3 \leq \frac{-2x_3 + 26 + 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_3 - 15 \leq y_3 \leq -x_3 + 15$$

である。

以上をまとめると下図の斜線部になる。



求める面積のうち, $7 \leq x_3 < 8$ の範囲および $12 \leq x_3 < 13$ の範囲の面積はともに上底4, 下底6, 高さ1の台形の面積なので

$$\frac{(6+4) \cdot 1}{2} = 5$$

であり, $8 \leq x_3 \leq 12$ の範囲の面積は辺の長さがそれぞれ4, 6の長方形の面積なので

$$4 \cdot 6 = 24$$

であるから, 求める面積は

$$24 + 5 \cdot 2 = 34$$

である。