

1

〔解答〕

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	4

〔解説〕

$$\begin{aligned}f(x) &= 8 \log \sqrt{6 + \sqrt{9 + x^3}} \\&= 4 \log (6 + \sqrt{9 + x^3})\end{aligned}$$

であるので、

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}}{6 + \sqrt{9+x^3}} = \frac{6x^2}{(6 + \sqrt{9+x^3}) \cdot \sqrt{9+x^3}}$$

となる。 $x=3$ のとき、

$$f'(3) = \frac{6 \cdot 3^2}{(6 + \sqrt{9+3^3}) \sqrt{9+3^3}} = \frac{3}{4}$$

である。

〔解答〕

ウ	エ	オ	カ	キ	ク
1	4	2	7	1	9

〔解説〕

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 4z - 28 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 7^2$$

であるから、曲面 C は球の表面であり、その中心は $(1, 4, 2)$ で、半径は 7 である。また、 C 上の点 $(-5, 6, 5)$ で接する平面を D とすると、 D に対する法線ベクトルの 1 つは、

$$(1, 4, 2) - (-5, 6, 5) = (6, -2, -3)$$

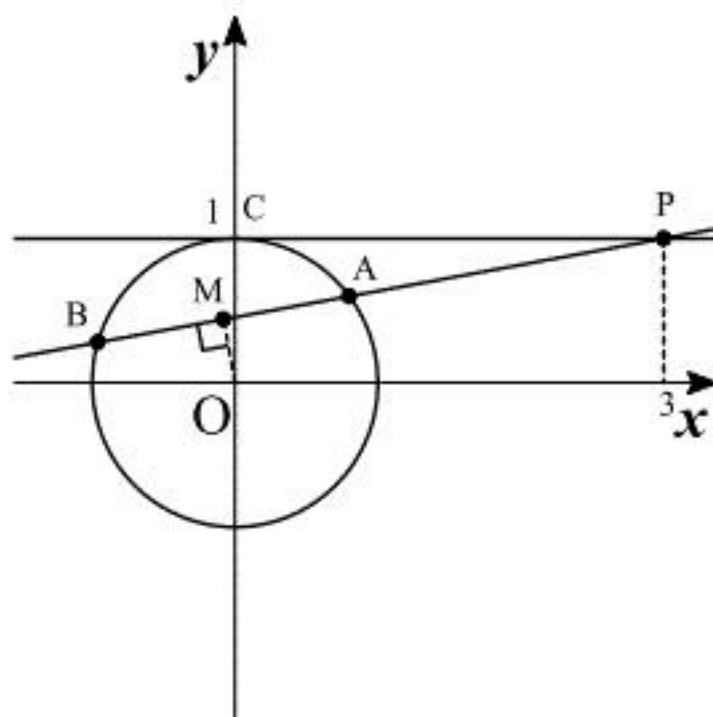
であるので、 D の方程式は $6(x+5) - 2(y-6) - 3(z-5) = 0$ となる。 D が z 軸と交わる時、 $x=y=0$ であり、これを D の方程式に代入すると、 $z=19$ となる。よって z 軸との交点は、 $(0, 0, 19)$ である。

3

〔解答〕

ㄱ	ㄴ	ㄷ	ㄹ	ㅁ
4	5	5	2	5

〔解説〕



$PA = \sqrt{5}$ のとき、方べきの定理より、

$$PC^2 = PA \cdot PB$$

$$\Leftrightarrow 3^2 = \sqrt{5}(\sqrt{5} + AB)$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

となる。原点 O から直線 AB に下した垂線の足を M とする。△OMA における三平方の定理より、

$$OM^2 + MA^2 = OA^2$$

$$\Leftrightarrow OM^2 = 1^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow OM = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

であるから、

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

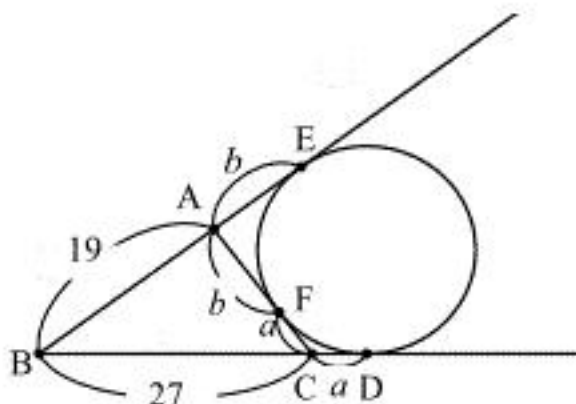
となる。

4

〔解答〕

七	ソ
3	5

〔解説〕



図のようにE, Fを定める。 $CD = CF = a$, $AE = AF = b$ とすると, $BD = BE$ より

$$27 + a = 19 + b \Leftrightarrow a - b = -8$$

であり, $AC = AF + FC$ より

$$a + b = 24$$

である。以上より, $(a, b) = (8, 16)$ となる。 $BD = BC + a$ であるから, $BD = 35$ である。

〔解答〕

タ	チ	ツ	テ
-	4	3	8

〔解説〕

$$f(\theta) = 4(1 + \sin \theta) - \frac{3}{1 - \sin \theta} \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 4 \cos \theta + 3 \cdot \frac{-1 \cdot (\cos \theta)}{(1 - \sin \theta)^2} \\ &= \frac{4 \cos \theta}{(1 - \sin \theta)^2} \left(\sin \theta - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) \left(\sin \theta - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $\sin \alpha = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ となる α を用いると、 $f(\theta)$ の増減は以下のように表せる。

θ	(0°)	...	α	...	(90°)
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

増減表より、 $f(\theta)$ は $\theta = \alpha$ で極大かつ最大になるから、求める最大値は

$$f(\alpha) = 4 \cdot \left(1 + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right) - \frac{3}{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = -4\sqrt{3} + 8$$

である。

〔解答〕

ア	イ	ウ
1	1	8

〔解説〕

さいころを3回投げたときの目の出方は 6^3 通り存在し、それらが起こる確率は同様に確からしい。

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

であるから、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最小値 m は $c - \frac{b^2}{4a}$ である。 $m > \frac{11}{2}$ であるとき、

$c - \frac{b^2}{4a} > \frac{11}{2}$ となる。 $\frac{b^2}{4a} > 0$ であることより、 $c = 6$ と言えるから

$$6 - \frac{b^2}{4a} > \frac{11}{2} \Leftrightarrow 2a > b^2 \quad (\because a > 0)$$

となる。これを満たす (a, b) の組は

$(a, b) = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)$ の12組あ

るから、求める確率は $\frac{12}{6^3} = \frac{1}{18}$ である。

〔解答〕

工	才	力
-	1	2

〔解説〕

x についてのある多項式 $Q(x)$ と、ある実数 a, b を用いて、 $x+x^{104}=(1-x+x^2)Q(x)+ax+b$ と

表すことが出来る。ここで、 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6=1$ であることより、 $j \equiv 2 \pmod{6}$ なる自然数 j につい

て、 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^j = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である。これと、 $104 \equiv 2 \pmod{6}$ であること、及び

$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + 1 = 0$ であることより、 $x+x^{104}=(1-x+x^2)Q(x)+ax+b$ に $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を代入すると、

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}a+b \Leftrightarrow \sqrt{3}i = \left(\frac{1}{2}a+b\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2}a$$

となる。この式の実部と虚部を比較すると、 $(a, b) = (2, -1)$ であることが分かる。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ
-	4	6	3

〔解説〕

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は、 $f'(x)$ が符号変化を起こすことである。ここで、

$$f'(x) = \frac{2}{3x} + 4x + a$$

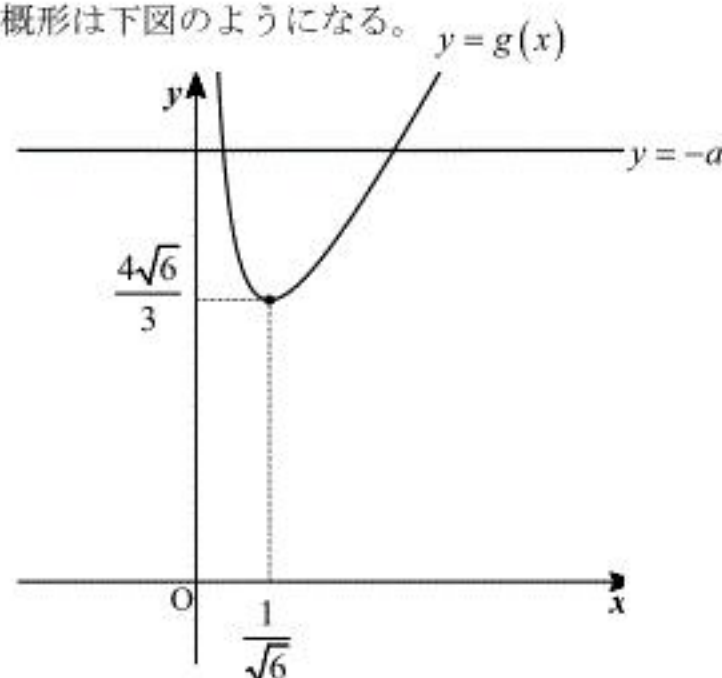
であり、 $g(x) = \frac{2}{3x} + 4x$ とおくと、

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2}{3x^2} + 4 \\ &= \frac{12}{3x^2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

となるので、 $x > 0$ に注意すると、 $g(x)$ の増減は以下ようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	(∞)
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	(∞)	$\searrow$	極小	$\nearrow$	(∞)

増減表から、 $y = g(x)$ の概形は下図のようになる。



増減表より、 $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき $g(x)$ は極小値をとり、 $g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ となる。これより、 $f'(x)$ が符号変化を起こすための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{6}}{3} + a &< 0 \\ \Leftrightarrow a &< \frac{-4\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

である。以上より、 $f(x)$ が極値をもつための a の範囲は、 $a < \frac{-4\sqrt{6}}{3}$ である。

〔解答〕

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
3	1	-	4	3	1	0

〔解説〕

△BCDにおける正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{\sin \angle DBC} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin 105^\circ}$$

である。ここで $\sin 105^\circ$ について、

$$\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

であるから、

$$\begin{aligned} CD &= \frac{2}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 105^\circ \\ &= \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

となる。次に、△BDEにおける余弦定理より、

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2 \cdot DB \cdot BE \cdot \cos \angle DBE$$

である。△BCDにおける正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin \angle CDB} &= \frac{DB}{\sin \angle BCD} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{DB}{\sin 30^\circ} \\ \therefore DB &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。また、△BCEにおける正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin \angle CEB} &= \frac{BE}{\sin \angle BCE} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 105^\circ} = \frac{BE}{\sin 45^\circ} \\ \therefore BE &= 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

である。 $\angle DBE = 75^\circ$ であり、 $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ より、

$$\begin{aligned} DE^2 &= (\sqrt{2})^2 + \{2(\sqrt{3} - 1)\}^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2(\sqrt{3} - 1) \cdot \cos 75^\circ \\ &= -4\sqrt{3} + 10 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ツ	テ
-	9

〔解説〕

整式 $(a+1)x^2 + 10xy - 3y^2 - 2ax - 12y + a$ に $x=0$ を代入すると、 $-3y^2 - 12y + a$ になるが、問の条件より、これは、 y についての、整数係数の一次式の積に因数分解することができるから、二次方程式 $3y^2 - 12y - a = 0$ は、2つの有理数解を持つ。以上より、この二次方程式の判別式を D_1 とおくと、 $(a+1)x^2 + 10xy - 3y^2 - 2ax - 12y + a$ が整数係数の一次式の積に因数分解することができる為の必要条件として、

$$D_1 \geq 0 \text{ かつ } D_1 \text{ が平方数}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_1}{4} \geq 0 \text{ かつ } D_1 \text{ が平方数}$$

$$\Leftrightarrow 6^2 + 3a \geq 0 \text{ かつ } 6^2 + 3a \text{ が平方数}$$

$$\Leftrightarrow a \geq -12 \text{ かつ } 3a + 36 \text{ が平方数} \quad \dots \textcircled{1}$$

が考えられる。同様にして、整式 $(a+1)x^2 + 10xy - 3y^2 - 2ax - 12y + a$ に $y=0$ を代入すると $(a+1)x^2 - 2ax + a$ が得られるから、二次方程式 $(a+1)x^2 - 2ax + a = 0$ の判別式を D_2 とおくと、 $(a+1)x^2 + 10xy - 3y^2 - 2ax - 12y + a$ が整数係数の一次式の積に因数分解することができる為の必要条件として、

$$D_2 \geq 0 \text{ かつ } D_2 \text{ が平方数}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_2}{4} \geq 0 \text{ かつ } D_2 \text{ が平方数}$$

$$\Leftrightarrow (-a)^2 - (a+1)a \geq 0 \text{ かつ } (-2a)^2 - 4(a+1)a \text{ が平方数}$$

$$\Leftrightarrow a \leq 0 \text{ かつ } -4a \text{ が平方数} \quad \dots \textcircled{2}$$

が考えられる。①、②より、 $a=0$ または $a=-9$ であることが必要である。

[1] $a=0$ のとき

整式 $(a+1)x^2 + 10xy - 3y^2 - 2ax - 12y + a$ は $x^2 + 10xy - 3y^2 - 12y$ となるが、

$$x^2 + 10xy - 3y^2 = \left\{ x - (-5 + 2\sqrt{7})y \right\} \left\{ x - (-5 - 2\sqrt{7})y \right\}$$

であるから、 $x^2 + 10xy - 3y^2 - 12y$ は係数が整数になるように因数分解できない。これより、 $a=0$ は解として不適である。

[2] $a=-9$ のとき

整式 $(a+1)x^2 + 10xy - 3y^2 - 2ax - 12y + a$ は $-8x^2 + 10xy - 3y^2 + 18x - 12y - 9$ となり、

$$-8x^2 + 10xy - 3y^2 + 18x - 12y - 9 = -(4x - 3y - 3)(2x - y - 3)$$

のように因数分解できる。

以上[1],[2]より、 $a=-9$ である。

〔解答〕

	
2	3

〔解説〕

$$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$= (t, 1-t)$$

$$\overrightarrow{OD} = (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$= (0, 1-t)$$

であるから、

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$

$$= (-1, 1-t)$$

となる。 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OC}$ を考えると、

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OC} = (-1, 1-t) \cdot (t, 1-t)$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{OC}| \cos \theta = (-1, 1-t) \cdot (t, 1-t)$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{-t + (1-t)^2}{\sqrt{(-1)^2 + (1-t)^2} \sqrt{t^2 + (1-t)^2}}$$

であり、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、

$$\left| \frac{-t + (1-t)^2}{\sqrt{(-1)^2 + (1-t)^2} \sqrt{t^2 + (1-t)^2}} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。この不等式は辺々正であるから、辺々2乗すると、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{-t + (1-t)^2}{\sqrt{(-1)^2 + (1-t)^2} \sqrt{t^2 + (1-t)^2}} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow & \left\{ -t + (1-t)^2 \right\}^2 < \frac{\left\{ (-1)^2 + (1-t)^2 \right\} \left\{ t^2 + (1-t)^2 \right\}}{2} \\ \Leftrightarrow & 2(t^2 - 3t + 1)^2 < (t^2 - 2t + 2)(2t^2 - 2t + 1) \\ \Leftrightarrow & 6t \left(t - \frac{2}{3} \right) \left(t - \frac{3}{2} \right) > 0 \end{aligned}$$

が得られる。以上より、求める t の範囲は $0 < t < \frac{2}{3}$ となる。

〔解答〕

ウ	エ
9	0

〔解説〕

 $f(x) = x^3 - 20x^2 + (100 - a)x + 8a - 23$ とおく。

$$f'(x) = 3x^2 - 40x + (100 - a)$$

であり、方程式 $3x^2 - 40x + (100 - a) = 0$ の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = 100 + 3a > 0$$

であることから、 $f(x)$ は極小値、極大値をもつ。 $y = f(x)$ の概形を調べる。

$$f(0) = 8a - 23$$

$$f(1) = 7a + 58 > 0$$

$$f(8) = 9 > 0$$

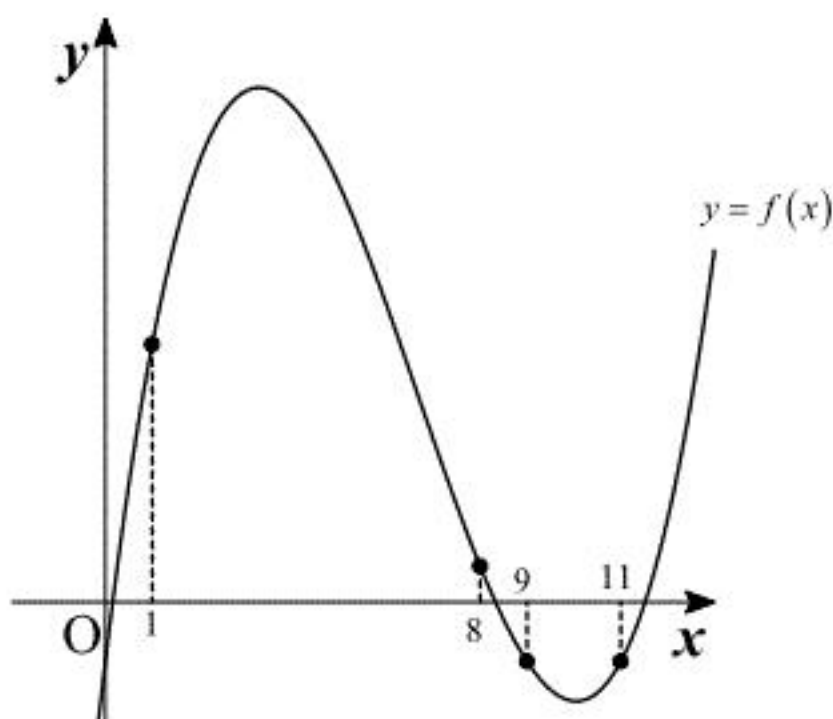
$$f(9) = -a - 14 < 0$$

$$f(10) = -2a - 23 < 0$$

$$f(11) = -3a - 12 < 0$$

$$f(12) = -4a + 25$$

であることより、 $y = f(x)$ の概形は次のようになる。



$f(8) = 9 > 0$, $f(9) = -a - 14 < 0$ であるので、3次方程式 $x^3 - 20x^2 + (100 - a)x + 8a - 23 = 0$ が正の整数解をただ1つもつとき、それは11より大きい。正の整数解を u とすると、 $u \geq 12$ であり、 $f(u) = 0$ である。ここで、 $u \geq 12$ のもと、

$$f(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow u^3 - 20u^2 + (100 - a)u + 8a - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow u^3 - 20u^2 + 100u - 23 = (u - 8)a$$

$$\Leftrightarrow (u - 8)(u^2 - 12u + 4) + 9 = (u - 8)a$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 12u + 4 + \frac{9}{u - 8} = a (\because u \geq 12)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{u - 8} = -u^2 + 12u + a - 4$$

であるが、 a, u ともに整数であることから、上式の右辺は整数である。これより、上式の左辺も整数となる。 $u \geq 12$ のもこの条件を満たすのは、 $u = 17$ のみである。このとき、 $a = 90$ である。逆に $a = 90$ であるとき、3次方程式 $x^3 - 20x^2 + (100 - a)x + 8a - 23 = 0$ は

$$x^3 - 20x^2 + 10x + 697 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 41)(x - 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3 + \sqrt{173}}{2}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{173}}{2}\right) (x - 17) = 0$$

となり、ただ1つ整数解をもつ。

〔解答〕

オ	カ	キ	ク	ケ
1	1	0	7	5

〔解説〕

$n \rightarrow \infty$ での振る舞いを考えるから、 $n \geq 2$ のときのみ考えれば良い。与えられた等式より、

$$n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \cdots + 2 \cdot a_{n-1} + a_n = \frac{n-4}{10} + \frac{2}{n+5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立している。また、与えられた等式において、 n を $n-1$ とおくと、

$$(n-1) \cdot a_1 + (n-2) \cdot a_2 + \cdots + a_{n-1} = \frac{(n-1)-4}{10} + \frac{2}{(n-1)+5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。①から②を辺々引くと、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{n+5} - \frac{2}{n+4}$$

となるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = \frac{1}{10}$$

である。また、 $n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \cdots + 2 \cdot a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^n (n-k+1) a_k$ であるから、

$$\sum_{k=1}^n (n-k+1) a_k = \frac{n-4}{10} + \frac{2}{n+5}$$

である。一方、先程の議論より $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{10} + \frac{2}{n+5} - \frac{2}{n+4}$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k a_k &= (n+1) \sum_{k=1}^n a_k - \left(\frac{n-4}{10} + \frac{2}{n+5} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{n+5} - \frac{2}{n+4} \right) - \left(\frac{n-4}{10} + \frac{2}{n+5} \right) \end{aligned}$$

が成立する。以上より、

$$\begin{aligned} 2 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2 + \cdots + (3n-4) a_{n-1} + (3n-1) a_n &= \sum_{k=1}^n (3k-1) \cdot a_k \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 3 \left\{ (n+1) \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{n+5} - \frac{2}{n+4} \right) - \left(\frac{n-4}{10} + \frac{2}{n+5} \right) \right\} - \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{n+5} - \frac{2}{n+4} \right) \\ &= 3 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}} - \frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n}} - \frac{2}{n+5} \right\} - \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{n+5} - \frac{2}{n+4} \right) \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (3k-1) \cdot a_k &= 3 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{2}{1} \right\} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

$\equiv$	$\oplus$
4	3

〔解説〕

曲線 $y^2 = (x-1)^2(2x-x^2)$ は x 軸対称であるので、 $y = |x-1|\sqrt{2x-x^2}$ を考えればよい。また、 x の範囲は $0 \leq x \leq 2$ である。

[1] $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$y = -(x-1)\sqrt{2x-x^2} \text{ であり,}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\sqrt{2x-x^2} - (x-1) \frac{\frac{1}{2} \cdot (2-2x)}{\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \frac{2x^2-4x+1}{\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \frac{2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2x-x^2}} \end{aligned}$$

であるので、 $0 \leq x \leq 1$ での増減は以下ようになる。

x	0	...	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	...	1
y'		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

これより、 y は $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

[2] $1 \leq x \leq 2$ のとき

$$y = (x-1)\sqrt{2x-x^2} \text{ であり,}$$

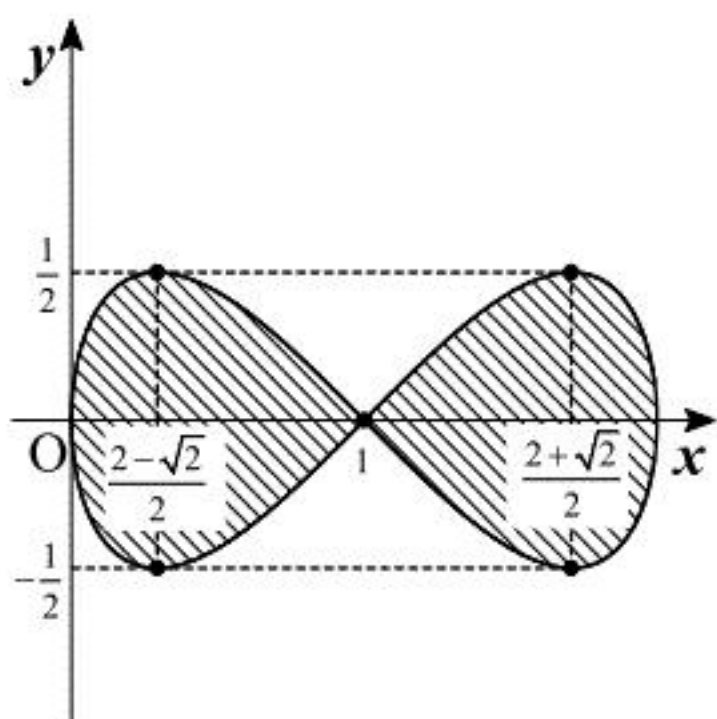
$$y' = -\frac{2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

であるので、 $1 \leq x \leq 2$ での増減は以下ようになる。

x	1	...	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	...	2
y'		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

これより、 y は $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

以上、[1]、[2]より曲線 $y^2 = (x-1)^2(2x-x^2)$ の概形は次のようになる。



この図形は x 軸及び直線 $x=1$ に関して対称であるから、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y$ の部分を考える。求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_0^1 y dx \\ &= \int_0^1 -(x-1)\sqrt{2x-x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $S = \frac{4}{3}$ である。

〔解答〕

☒	☐	☐	☐
4	5	2	6

〔解説〕

x_i, y_i の標準偏差をそれぞれ s_x, s_y とおき、 x_i, y_i の共分散を s_{xy} とおくと、

$$\begin{aligned} s_x &= \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \left(\frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} x_i \right)^2} \\ &= \sqrt{5 - X^2} \\ s_y &= \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} y_i^2 - \left(\frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} y_i \right)^2} \\ &= \sqrt{9 - Y^2} \\ s_{xy} &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i y_i - \left(\frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} y_i \right) \\ &= 5 - XY \end{aligned}$$

である。ここで、 s_x, s_y, s_{xy} には $|s_{xy}| \leq s_x s_y$ の関係が成立するから、 $X^2 \leq 5, Y^2 \leq 9$ のもとで、

$$\begin{aligned} |5 - XY| &\leq \sqrt{5 - X^2} \sqrt{9 - Y^2} \\ \Leftrightarrow (5 - XY)^2 &\leq (5 - X^2)(9 - Y^2) \\ \Leftrightarrow 9X^2 - 10XY + 5Y^2 - 20 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 5(Y - X)^2 + 4X^2 &\leq 20 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(Y - X)^2 + \frac{1}{5}X^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $5 > X^2$ であれば上式は成立せず⁹、また、

$$\begin{aligned} 9X^2 - 10XY + 5Y^2 - 20 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 9\left(X - \frac{5}{9}Y\right)^2 + \frac{20}{9}Y^2 &\leq 20 \end{aligned}$$

であるから、 $9 > Y^2$ であれば上式は成立しない。これより、点 (X, Y) の存在範囲を表す不等式

は、 $\frac{1}{4}(Y - X)^2 + \frac{1}{5}X^2 \leq 1$ である。このとき、 $X + Y = k$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(Y - X)^2 + \frac{1}{5}X^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(k - 2X)^2 + \frac{1}{5}X^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}|k - 2X| &\leq \sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2} \quad (\because X^2 \leq 5) \\ \Leftrightarrow 2X - 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2} &\leq k \leq 2X + 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2} \end{aligned}$$

である。ここで、 $f(X) = 2X - 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2}$ とおき、 $f(X)$ の $-\sqrt{5} \leq X \leq \sqrt{5}$ での範囲を求める。

$$\begin{aligned} f'(X) &= 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}X\right) \left(1 - \frac{1}{5}X^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2 + \frac{2X}{5\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2}} \\ &= \frac{10\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2} + 2X}{5\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $f'(X) = 0$ となるのは、

$$\begin{aligned} 10\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2} + 2X &= 0 \\ \Leftrightarrow 100\left(1 - \frac{1}{5}X^2\right) &= 4X^2, \quad X \leq 0 \\ \Leftrightarrow X &= -\frac{5}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

であるから、 $f(X)$ の増減は以下の通りとなる。

X	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	$-\frac{5}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{5}$
$f'(X)$		$-$	0	$+$	
$f(X)$		$\searrow$	$-2\sqrt{6}$	$\nearrow$	

これより、 $-\sqrt{5} \leq X \leq \sqrt{5}$ における $2X - 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2}$ の最小値は $-2\sqrt{6}$ である。また、

$2X + 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2} = -f(-X)$ であるから、 $-\sqrt{5} \leq X \leq \sqrt{5}$ における $2X + 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}X^2}$ の最大値は

$2\sqrt{6}$ である。これより、 X を変化させたときの k の存在範囲は、

$$-2\sqrt{6} \leq k \leq 2\sqrt{6}$$

である。以上より、 $|X + Y|$ の存在範囲は、

$$0 \leq |X + Y| \leq 2\sqrt{6}$$

である。