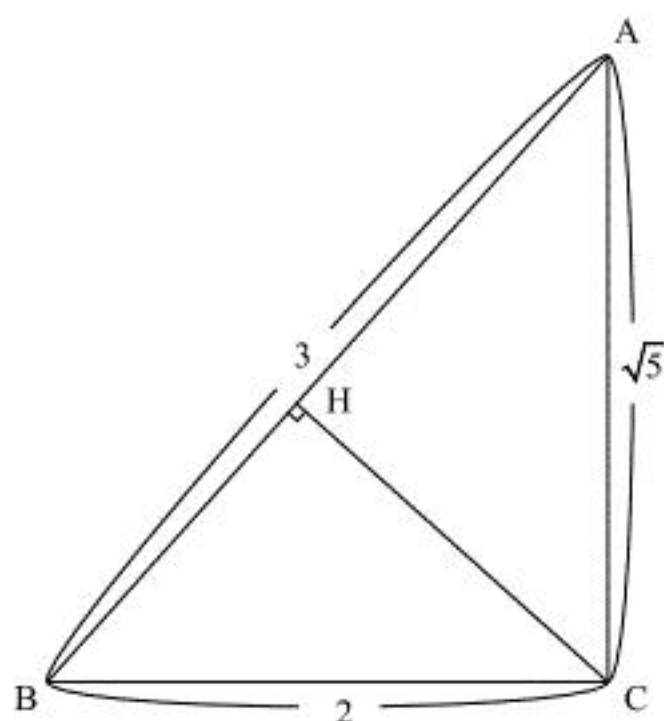


〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
5	3	9	5	1	0

〔解説〕



$AB=3$, $BC=2$, $CA=\sqrt{5}$ より,

$$AB^2 = CA^2 + BC^2$$

が成り立つので、三平方の定理の逆より、 $\triangle ABC$ は、 $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形である。よって、 $\triangle ABC$ の面積を考えると、

$$\frac{1}{2}BC \cdot CA = \frac{1}{2}AB \cdot CH$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot CH$$

$$\Leftrightarrow CH = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

となる。このとき、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AC^2 - CH^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} &= \frac{CA}{BC} + \frac{BC}{CA} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ	サ
1	3	2	3	2

〔解説〕

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1+x^3} &= \frac{a+bx}{1-x+x^2} + \frac{c}{1+x} \\ \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x^3} &= \frac{(a+c) + (a+b-c)x + (b+c)x^2}{1+x^3}\end{aligned}$$

である。これが x についての恒等式であるから、

$$\begin{cases} a+c=1 \\ a+b-c=-1 \\ b+c=0 \end{cases}$$

となる。これを解くと、 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=\frac{2}{3}$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} dx &= -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{3} [\log|x^2-x+1|]_0^1 + \frac{2}{3} [\log|x+1|]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \log 2\end{aligned}$$

である。

〔解答〕

シ	ス	セ	ソ	タ
2	8	2	5	2

〔解説〕

$$2^x - 2^8 \leq 4 - 2^{10} 2^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^x - (2^8 + 2^2) + 2^{10} 2^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - (2^8 + 2^2) 2^x + 2^{10} \geq 0 (\because 2^x > 0)$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2^2)(2^x - 2^8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \leq 2^x \leq 2^8$$

となる。よって、底を2とする対数をとると、

$$2 \leq x \leq 8$$

である。ここで、

$$t = \log_2 x$$

とおくと、 t の範囲は、 $1 \leq t \leq 3$ となり、

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_4 x + \log_x 4 \\ &= \frac{\log_2 x}{2} + \frac{2}{\log_2 x} \\ &= \frac{t}{2} + \frac{2}{t} \end{aligned}$$

と表せる。これをあらためて

$$g(t) = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$$

とおくと、

$$g'(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{t^2} = \frac{(t+2)(t-2)}{2t^2}$$

であるから、 $1 \leq t \leq 3$ における増減表は次のようになる。

t	1	...	2	...	3
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{13}{6}$

したがって、 $\frac{5}{2} > \frac{13}{6}$ より、最小値2、最大値 $\frac{5}{2}$ である。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
-	4	3	-	4	8

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 r &= -16 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= -16 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= -16 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \\
 &= -8 \sin \theta - 8\sqrt{3} \cos \theta
 \end{aligned}$$

となる。両辺に r をかけると、

$$r^2 = -8r \sin \theta - 8\sqrt{3}r \cos \theta$$

である。直交座標では、 $x = r \sin \theta$, $y = r \cos \theta$ より、

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= -8y - 8\sqrt{3}x \\
 \Leftrightarrow (x + 4\sqrt{3})^2 + (y + 4)^2 &= 8^2
 \end{aligned}$$

となる。よって、中心 $(-4\sqrt{3}, -4)$ 、半径 8 の円である。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ	サ
0	2	0	1	6

〔解説〕

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + ax - 10$$

より,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + a$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

となる。よって、変曲点の x 座標は,

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, 2$$

である。また、 $f(x)$ は最高次数の係数が正の 4 次関数であるから、極大値を持つ条件は、 $f'(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつことである。

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^3 + 12x^2 = a$$

より,

$$g(x) = -4x^3 + 12x^2$$

とおくと,

$$g'(x) = -12x^2 + 24x = -12x(x-2)$$

より、増減表は次のようになる。

t	...	0	...	2	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$

したがって、 $y = g(x)$ と $y = a$ が異なる 3 つの共有点をもつとき、 a の値の範囲は $0 < a < 16$ であり、これが $f(x)$ が極大値をもつ条件である。

〔解答〕

シ	ス	セ	ソ	タ
1	0	5	5	2

〔解説〕

重心が $(2, \sqrt{2})$ より,

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} = (2, \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (6, 3\sqrt{2})$$

であるから,

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2 = 54$$

となる。また,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= 5^2 + 3^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= 34 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

であるから,

$$54 = 34 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 10$$

となる。また、 $\triangle OAB$ の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5^2 \cdot 3^2 - 10^2} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
-	1	6	6	1	1	1	1

〔解説〕

$\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ において、余弦定理を用いると、

$$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC \end{cases}$$

となる。ここで、 $\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC$ より、

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos (180^\circ - \angle ABC) \\ \Leftrightarrow 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos \angle ABC &= 3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos \angle ABC \\ \therefore \cos \angle ABC &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ &= 11 \end{aligned}$$

より、 $AC = \sqrt{11}$ である。ここで、 $\angle ACB = \angle DCE$ であり、円周角の定理より、 $\angle BAC = \angle EDC$ であるから、 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ である。よって、

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{CE}{DC} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{11}} &= \frac{CE}{2} \\ \therefore CE &= \frac{6\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ケ	コ	サ	シ
7	4	3	6

〔解説〕

25 人全員の点数の平均値を E とおくと、

$$E = \frac{1}{25}(70 \cdot 15 + 80 \cdot 10) = 74$$

である。A 班の 15 人の点数を $x_i (i=1, 2, \dots, 15)$ 、B 班の 10 人の点数を $y_i (i=1, 2, \dots, 10)$ とおく。A 班、B 班それぞれの平均と分散から、

$$\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i = 70$$

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 80$$

$$\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - 70)^2 = 10$$

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - 80)^2 = 15$$

と表せる。ここで、25 人全員の分散を V とおくと、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^{15} (x_i - 74)^2 + \sum_{i=1}^{10} (y_i - 74)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^{15} (x_i - 70)^2 - 8 \sum_{i=1}^{15} x_i + \sum_{i=1}^{15} 576 + \sum_{i=1}^{10} (y_i - 80)^2 + 12 \sum_{i=1}^{10} y_i - \sum_{i=1}^{10} 924 \right\} \\ &= \frac{1}{25} (150 - 8 \cdot 1050 + 576 \cdot 15 + 150 + 12 \cdot 800 - 924 \cdot 10) \\ &= 36 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ス	セ	ソ	タ
2	3	5	6

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 2a_{n+1} + b_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n - 1 \right) + \left(\frac{2}{3}a_n + \frac{4}{3}b_n + 1 \right) \\
 &= \frac{2}{3}(2a_n + b_n)
 \end{aligned}$$

より、数列 $\{2a_n + b_n\}$ は、公比 $\frac{2}{3}$ 、初項 $2a_1 + b_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$ の等比数列である。よって、

$$2a_n + b_n = \frac{19}{12} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{4}{3}b_n + 1 \\
 &= \frac{1}{3}(2a_n + b_n) + b_n + 1 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{12} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + b_n + 1 \\
 &= b_n + \frac{19}{36} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + 1
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
 b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{19}{36} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} + 1 \right\} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{19}{36} \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} + (n-1) \\
 &= \frac{19}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\} + n - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{19}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\} - \frac{3}{4} \right] = \frac{5}{6}$$

である。

〔解答〕

チ	ツ	テ	ト
6	5	1	2

〔解説〕

a, b, c, d, e は1以上9以下の自然数であるから、 $3 \leq a+b+c \leq 27$ 、 $2 \leq d+e \leq 18$ である。

また、

$$(a+b+c)(d+e) = 104 = 2^3 \cdot 13$$

より、

$$(a+b+c, d+e) = (8, 13), (13, 8), (26, 4)$$

のいずれかである。

[1] $(a+b+c, d+e) = (8, 13)$ のとき

$a \leq b \leq c$ を満たす a, b, c は、

$$(a, b, c) = (1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3)$$

の5通りであり、 $d \leq e$ を満たす d, e は、

$$(d, e) = (4, 9), (5, 8), (6, 7)$$

の3通りであるから、 $a \leq b \leq c$ 、 $d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は $5 \cdot 3 = 15$ 通りである。次に、

$a \leq b \leq c \leq d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e を求める。

[i] $(a, b, c) = (1, 1, 6)$ のとき

$(d, e) = (6, 7)$ である。

[ii] $(a, b, c) = (1, 2, 5)$ のとき

$(d, e) = (5, 8), (6, 7)$ である。

[iii] $(a, b, c) = (1, 3, 4)$ のとき

$(d, e) = (4, 9), (5, 8), (6, 7)$ である。

[iv] $(a, b, c) = (2, 2, 4)$ のとき

$(d, e) = (4, 9), (5, 8), (6, 7)$ である。

[v] $(a, b, c) = (2, 3, 3)$ のとき

$(d, e) = (4, 9), (5, 8), (6, 7)$ である。

以上[i]から[v]より、 $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は12通りである。

[2] $(a+b+c, d+e) = (13, 8)$ のとき

$a \leq b \leq c$ を満たす a, b, c は

$$(a, b, c) = (1, 3, 9), (1, 4, 8), (1, 5, 7), (1, 6, 6), (2, 2, 9), (2, 3, 8), \\ (2, 4, 7), (2, 5, 6), (3, 3, 7), (3, 4, 6), (3, 5, 5), (4, 4, 5)$$

の12通りであり、 $d \leq e$ を満たす d, e は、

$$(d, e) = (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)$$

の4通りであるから、 $a \leq b \leq c$ 、 $d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は $12 \cdot 4 = 48$ 通りである。また、

$a \leq b \leq c \leq d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は存在しない。

[3] $(a+b+c, d+e) = (8, 13)$ のとき

$a \leq b \leq c$ を満たす a, b, c は、

$$(a, b, c) = (8, 9, 9)$$

の1通りであり、 $d \leq e$ を満たす d, e は、

$$(d, e) = (1, 3), (2, 2)$$

の2通りであるから、 $a \leq b \leq c$ 、 $d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は $1 \cdot 2 = 2$ 通りである。また、

$a \leq b \leq c \leq d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は存在しない。

以上[1], [2], [3]より、 $a \leq b \leq c$ 、 $d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は $15 + 48 + 2 = 65$ 通りである。また、

$a \leq b \leq c \leq d \leq e$ を満たす a, b, c, d, e は12通りである。