

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
4	2	7	2	9

〔解説〕

4人でじゃんけんを1回するとき、手の出し方は $3^4 (=81)$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。ちょうど1人が勝つ場合の数は、勝つ人の選び方の4通りと手の出し方の3通りの積を考えることで

$$4 \cdot 3 = 12 (\text{通り})$$

となるから、求める確率は

$$\frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

となる。また、ちょうど2人が勝つ場合の数は、勝つ人の選び方の ${}_4C_2 (=6)$ 通りと手の出し方の3通りの積を考えることで

$$6 \cdot 3 = 18 (\text{通り})$$

となるから、求める確率は

$$\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$$

となる。

[解答]

カ	キ	ク	ケ	コ
-	5	1	7	2

[解説]

4 次方程式 $x^4 + ax^3 + 10x^2 - 12x + b = 0$ が 2 重解 $x = 2$ をもつのは、 $(x-2)^2$ で割り切れるときで

あるから

$$\begin{aligned} & x^4 + ax^3 + 10x^2 - 12x + b \\ &= \{x^2 + (a+4)x + (4a+22)\}(x^2 - 4x + 4) + (12a+60)x - 16a - 88 + b \end{aligned}$$

より、 a, b の値は

$$\begin{cases} 12a+60=0 \\ -16a-88+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = (-5, 8)$$

と求まる。また、他の 2 つの虚数解は、2 次方程式 $x^2 + (a+4)x + (4a+22) = 0$ に $a = -5$ を代入することで

$$x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

と求まる。

〔解答〕

サ	シ	ス	セ	ソ	タ
－	1	3	1	9	9

〔解説〕

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、両辺を2乗して変形すると、 $\sin \theta \cos \theta$ の値は

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

となる。よって、求める値は

$$\begin{aligned} \left(\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right) &= \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \sin \theta \cos \theta \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} &\left(\sin^2 \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= \left(\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right) \left(\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) \\ &= \sin \theta \cos \theta \left(\sin \theta \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \right) \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \\ &= \frac{19}{9} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
5	2	1	1	6	7	1	5

〔解説〕

点Pは線分ABを9:1に内分する点であるから、その座標は

$$\left(\frac{1 \cdot 6 + 9 \cdot 1}{9+1}, \frac{1 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{9+1} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{10} \right)$$

である。また、点Qは線分OPを5:2に外分する点であるから、その座標は

$$\left(\frac{(-2) \cdot 0 + 5 \cdot \frac{3}{2}}{5-2}, \frac{(-2) \cdot 0 + 5 \cdot \frac{11}{10}}{5-2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{6} \right)$$

である。さらに、点Qから直線OAへ垂線QHを下すとき、 $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OA}$ とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{QH} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OQ}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot (t\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}) \\ &= t|\overrightarrow{OA}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= t(6^2 + 2^2) - \left(6 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{11}{6} \right) \\ &= 40t - \frac{56}{3} \end{aligned}$$

となるから、

$$40t - \frac{56}{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{15}$$

のとき $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{QH} = 0$ となり、 $|\overrightarrow{OA}| \neq 0$ 、 $|\overrightarrow{QH}| \neq 0$ も満たすため、 $OA \perp QH$ となる。

〔解答〕

ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
3	7	9	1	9	4	4	0

〔解説〕

n を 5 以上の自然数とし、 n 進法で M と表された数を $M_{(n)}$ と表すとき、

$$\begin{aligned} 104_{(n)} &= 1_{(10)} \cdot n_{(10)}^2 + 0_{(10)} \cdot n_{(10)}^1 + 4_{(10)} \cdot n_{(10)}^0 \\ &= n_{(10)}^2 + 4_{(10)} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{10} 104_{(n)} &= \sum_{n=5}^{10} (n_{(10)}^2 + 4_{(10)}) \\ &= (25_{(10)} + 36_{(10)} + 49_{(10)} + 64_{(10)} + 81_{(10)} + 100_{(10)}) + 6_{(10)} \cdot 4_{(10)} \\ &= 355_{(10)} + 24_{(10)} \\ &= 379_{(10)} \end{aligned}$$

と表すことができる。また、同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1_{(n)}}{401_{(n)} - 104_{(n)}} &= \frac{1_{(10)}}{(4_{(10)} \cdot n_{(10)}^2 + 1_{(10)}) - (n_{(10)}^2 + 4_{(10)})} \\ &= \frac{1_{(10)}}{3_{(10)} \cdot n_{(10)}^2 - 3_{(10)}} \\ &= \frac{1_{(10)}}{6_{(10)}} \cdot \left(\frac{1_{(10)}}{n_{(10)} - 1_{(10)}} - \frac{1_{(10)}}{n_{(10)} + 1_{(10)}} \right) \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{10} \frac{1_{(n)}}{401_{(n)} - 104_{(n)}} &= \sum_{n=5}^{10} \frac{1_{(10)}}{6_{(10)}} \cdot \left(\frac{1_{(10)}}{n_{(10)} - 1_{(10)}} - \frac{1_{(10)}}{n_{(10)} + 1_{(10)}} \right) \\ &= \frac{1_{(10)}}{6_{(10)}} \cdot \left(\frac{1_{(10)}}{4_{(10)}} + \frac{1_{(10)}}{5_{(10)}} - \frac{1_{(10)}}{10_{(10)}} - \frac{1_{(10)}}{11_{(10)}} \right) \\ &= \frac{19_{(10)}}{440_{(10)}} \end{aligned}$$

と表すことができる。

〔解答〕

チ	ツ	テ	ト	ナ
2	7	8	7	4

〔解説〕

放物線 $y = ax^2 - bx + c$ について

$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 - bx + c \\
 &= a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

と変形できるから、頂点 (p, q) が $\frac{3}{2} < p < 2, 1 < q < 2$ となるのは

$$\frac{3}{2} < \frac{b}{2a} < 2 \Leftrightarrow 3a < b < 4a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$1 < \frac{-b^2 + 4ac}{4a} < 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{b^2}{4a} < c < 2 + \frac{b^2}{4a} \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たすときであり、 a, b, c はそれぞれ1桁の自然数であるから、①より

$$(a, b) = (2, 7)$$

となる。また、これらを代入することで、②は $1 + \frac{49}{8} < c < 2 + \frac{49}{8}$ となるから、

$$c = 8$$

となる。 $(a, b, c) = (2, 7, 8)$ のとき、与えられた放物線は

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^2 - 7x + 8 \\
 &= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}
 \end{aligned}$$

となるから、求める放物線の準線は、放物線 $y = 2x^2$ の準線 $y = -\frac{1}{8}$ を y 軸方向に $+\frac{15}{8}$ だけ平

行移動したものであり、

$$y = -\frac{1}{8} + \frac{15}{8} \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}$$

と求まる。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
5	4	7	9	6

〔解説〕

中心 $(0, a)$ 、半径 1 の円が放物線 $y = x^2$ と異なる 2 点で接するような条件を求める。まず、放物線 $y = x^2$ 上の点 (p, p^2) が、円 $x^2 + (y - a)^2 = 1$ 上にあるための条件は

$$p^2 + (p^2 - a)^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、放物線 $y = x^2$ 上の点 (p, p^2) における接線の傾きは、 $y' = 2x$ より $2p$ であり、円

$x^2 + (y - a)^2 = 1$ 上の点 (p, p^2) における接線の法線ベクトルの 1 つは $(p, p^2 - a)$ であるから、

点 (p, p^2) における各接線の傾きが一致するための条件は

$$(1, 2p) \cdot (p, p^2 - a) = 0 \Leftrightarrow p + 2p(p^2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow p\{1 + 2(p^2 - a)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 0 \quad \text{または} \quad p^2 - a = -\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。このとき、①と②を満たす実数 p が 2 つ存在するような定数 a を求めればよい。

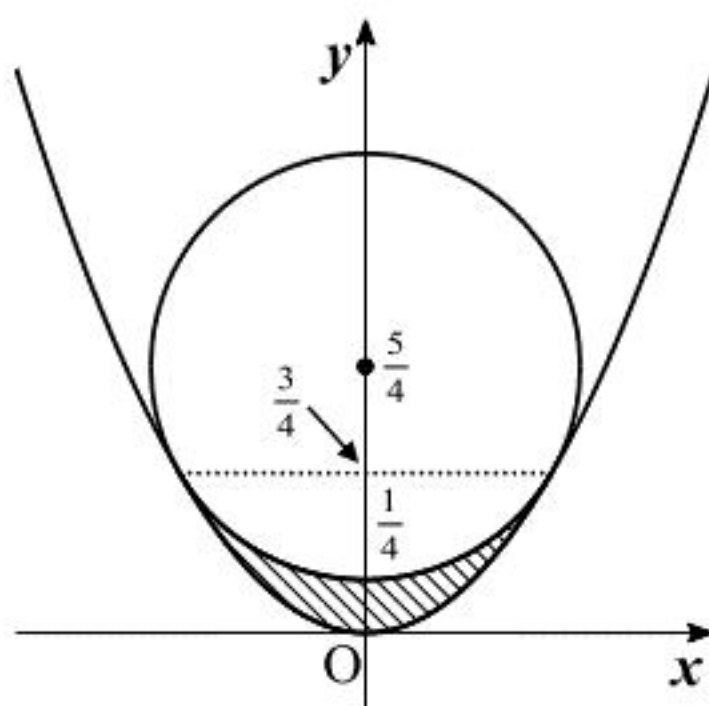
[1] $p = 0$ のとき

①より $a = \pm 1$ となるが、いずれにせよ、①と②を満たす実数 p は 0 のみとなってしまうため不適である。

[2] $p^2 - a = -\frac{1}{2}$ のとき

①より $p = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり、 $a = \frac{5}{4}$ となる。このとき、求める条件を満たす。

したがって、[1], [2] より、求める円の中心の y 座標は $\frac{5}{4}$ であることがわかる。



また、2 つの接点を結ぶ弧と放物線とで囲まれた部分(上図の斜線部)を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は、放物線の $x \geq 0$ の部分を $x = f_1(y)$ 、円の $x \geq 0$ の部分を $x = f_2(y)$ 、

直線 $y = \frac{3}{4}$ を ℓ とすると

(放物線と直線 ℓ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積)

− (円と直線 ℓ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{3}{4}} \pi \{f_1(y)\}^2 dy - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \pi \{f_2(y)\}^2 dy \\
 &= \pi \int_0^{\frac{3}{4}} y dy - \pi \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left\{ 1 - \left(y - \frac{5}{4} \right)^2 \right\} dy \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\frac{3}{4}} - \pi \left[y - \frac{1}{3} \left(y - \frac{5}{4} \right)^3 \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \\
 &= \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 \right) \right\} \pi - \left\{ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right\} \pi \\
 &= \frac{7}{96} \pi
 \end{aligned}$$

と求まる。

[解答]

力	キ	ク	ケ	コ	サ
2	9	5	5	3	5

[解説]

$|x|=1, |y|=2, |z|=5, x\bar{z}+\bar{x}z=6, y\bar{z}+\bar{y}z=16$ が成り立つとき, $x\bar{z}=a+bi, y\bar{z}=c+di$ とおくと

$$\begin{cases} x\bar{z}+\bar{x}z=6 \\ y\bar{z}+\bar{y}z=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+bi)+(a-bi)=6 \\ (c+di)+(c-di)=16 \end{cases} \Leftrightarrow (a, c)=(3, 8)$$

となり,

$$\begin{cases} |x\bar{z}|=5 \\ |y\bar{z}|=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ c^2+d^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=16 \\ d^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow (b, d)=(\pm 4, \pm 6) \text{ (複号任意)}$$

となるから, $|x-y|$ の値は

$$|x-y| = \frac{|(x-y)\bar{z}|}{|\bar{z}|} = \frac{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}{5}$$

より,

$$(b, d)=(\pm 4, \mp 6) \text{ (複号同順) のとき, } \frac{\sqrt{(-5)^2+(\pm 2)^2}}{5} = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$(b, d)=(\pm 4, \pm 6) \text{ (複号同順) のとき, } \frac{\sqrt{(-5)^2+(\pm 10)^2}}{5} = \sqrt{5}$$

となる。また,

$$|z-x| = \sqrt{(z-x)(\overline{z-x})} = \sqrt{z\bar{z} - (z\bar{x} + \bar{z}x) + x\bar{x}} = 2\sqrt{5}$$

$$|z-y| = \sqrt{(z-y)(\overline{z-y})} = \sqrt{z\bar{z} - (z\bar{y} + \bar{z}y) + y\bar{y}} = \sqrt{13}$$

であるから, $|x-y|=\sqrt{5}$ のとき, 3点 x, y, z が成す三角形に余弦定理を用いることで

$$\cos \theta = \frac{|z-x|^2 + |y-x|^2 - |z-y|^2}{2|z-x||y-x|} = \frac{20+5-13}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

と求まる。

[解答]

シ	ス	セ	ソ	タ
6	1	1	2	3

[解説]

$x > 0$ および $y > 0$ に対し、 $f(xy) - f(x) - f(y) = xy - x - y$ が成り立つとき、 $x = y = 2$ を代入することで、 $f(4)$ の値は

$$\begin{aligned} f(4) - f(2) - f(2) &= 4 - 2 - 2 \Leftrightarrow f(4) = 2f(2) \\ \therefore f(4) &= 6 \end{aligned}$$

と求まり、 $x = 4, y = 2$ を代入することで、 $f(8)$ の値は

$$\begin{aligned} f(8) - f(4) - f(2) &= 8 - 4 - 2 \Leftrightarrow f(8) = f(4) + f(2) + 2 \\ \therefore f(8) &= 11 \end{aligned}$$

と求まる。さらに、 $x > 2$ のとき、 x, y に $x+2, x-2$ を代入することで

$$\begin{aligned} f((x+2)(x-2)) - f(x+2) - f(x-2) &= (x+2)(x-2) - (x+2) - (x-2) \\ \Leftrightarrow f(x+2) + f(x-2) &= f(x^2 - 4) - x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

となるから、方程式 $f(x+2) + f(x-2) + (x-5)(x+3) = 0$ は

$$\begin{aligned} f(x+2) + f(x-2) + (x-5)(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x^2 - 4) - x^2 + 2x + 4 + (x^2 - 2x - 15) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x^2 - 4) &= 11 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $x = 8$ は $f(x) = 11$ を満たし、 $f'(x) > 0$ より $f(x) = 11$ を満たす実数 x の値は1つだけであるから、与えられた方程式の解は

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 8 \Leftrightarrow x^2 = 12 \\ \therefore x &= 2\sqrt{3} \quad (\because x > 2) \end{aligned}$$

となる。

[解答]

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
2	4	2	3	8	5	2

[解説]

3つの鋭角 α, β, γ について、 $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma$ がそれぞれ1桁の自然数であり、 $\tan \alpha > \tan \beta > \tan \gamma$ を満たす場合は

$$\frac{\pi}{4} \leq \gamma < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから、

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha < \pi, \frac{3}{4}\pi < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。よって、 $\tan(\alpha + \beta), \tan(\beta + \gamma), \tan(\gamma + \alpha), \tan(\alpha + \beta + \gamma)$ が定義でき、 $(\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma) = (5, 4, 3)$ のとき、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan \gamma} \\ &= \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} + \tan \gamma}{1 - \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \tan \gamma} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \gamma \tan \alpha} \\ &= \frac{5 + 4 + 3 - 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5} \\ &= \frac{24}{23} \end{aligned}$$

となる。また、 $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$ となるのは、②より

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{4}\pi$$

のときであり、さらに、 γ の範囲は、①、②より

$$\frac{5}{4}\pi - \pi < \gamma < \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{5}{12}\pi$$

となる。ここで、 $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ であり、 $\tan \frac{5}{12}\pi = 2 + \sqrt{3}$ であるから、 $\tan \gamma = 2, 3$ に限られる。

[1] $\tan \gamma = 2$ のとき

$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$ を変形することで

$$\begin{aligned} \frac{\tan \alpha + \tan \beta - 2 \tan \alpha \tan \beta + 2}{1 - \tan \alpha \tan \beta - 2(\tan \alpha + \tan \beta)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \tan \alpha \tan \beta - 3 \tan \alpha - 3 \tan \beta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\tan \alpha - 3)(\tan \beta - 3) &= 10 \\ \therefore (\tan \alpha, \tan \beta) &= (8, 5) \end{aligned}$$

となり、 $(\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma) = (8, 5, 2)$ は条件を満たす。

[2] $\tan \gamma = 3$

$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$ を変形することで

$$\begin{aligned} \frac{\tan \alpha + \tan \beta - 3 \tan \alpha \tan \beta + 3}{1 - \tan \alpha \tan \beta - 3(\tan \alpha + \tan \beta)} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2 \tan \alpha \tan \beta - 4 \tan \alpha - 4 \tan \beta - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\tan \alpha - 2)(\tan \beta - 2) &= 5 \\ \therefore (\tan \alpha, \tan \beta) &= (7, 3) \end{aligned}$$

となるが、 $(\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma) = (7, 3, 3)$ は①を満たさない。

以上[1], [2]より、 $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$ となるのは、 $(\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma) = (8, 5, 2)$ のときである。