

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
－	2	3	5	1	8

〔解説〕

 $f(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{ax-1+\sqrt{x^2+(a+2)x+1}}{x^2} \\
 &= \frac{(ax-1)^2 - \{x^2+(a+2)x+1\}}{x^2(ax-1-\sqrt{x^2+(a+2)x+1})} \\
 &= \frac{(a^2-1)x^2-(3a+2)x}{x^2(ax-1-\sqrt{x^2+(a+2)x+1})} \\
 &= \frac{(a^2-1)x-(3a+2)}{x(ax-1-\sqrt{x^2+(a+2)x+1})}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ が存在するには、 $x \rightarrow 0$ のとき ($f(x)$ の分母) $\rightarrow 0$ だから、($f(x)$ の

分子) $\rightarrow 0$ になることが必要である。よって、

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \{(a^2-1)x-(3a+2)\} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -3a-2 &= 0 \\
 \therefore a &= -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる。また、このときの極限值を求めると、

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{9}x}{x\left(-\frac{2}{3}x-1-\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x+1}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{6x+9+9\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x+1}} \\
 &= \frac{5}{18}
 \end{aligned}$$

となり、十分である。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
3	8	5	4	4	1	5

〔解説〕

x の中央値が12であり、 x には45個のデータがあるから、小さいほうから数えて23番目以降の x の値は12である。ここで、 x の平均値を最小にするには、22番目まですべて $x=3$ であればよいから、求める値は

$$\bar{x} = \frac{(3 \cdot 22 + 12 \cdot 23)}{45} = \frac{342}{45} = \frac{38}{5}$$

となる。同様に x の中央値が6のとき、23番目の x の値は6である。ここで、 x の平均値を最小にするには、22番目まですべて3であり、23番目以降すべて6であればよく、その値は

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 22 + 6 \cdot 23}{45} = \frac{204}{45} = \frac{68}{15} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 x の平均値を最大にするには、23番目まで6であり、24番目以降すべて12であればよく、その値は

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 23 + 12 \cdot 22}{45} = \frac{402}{45} = \frac{134}{15} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①、②より、 $\bar{x}$ のとりうる範囲は $\frac{68}{15} \leq \bar{x} \leq \frac{134}{15}$ であるから、

$$-\frac{22}{15} \leq \bar{x} - 6 \leq \frac{44}{15}$$

$$\Leftrightarrow |\bar{x} - 6| \leq \frac{44}{15}$$

と変形できる。よって、 $|\bar{x} - 6|$ の最大値は $\frac{44}{15}$ である。

〔解答〕

セ	ソ	タ	チ	ツ
1	3	3	2	9

〔解説〕

$f(x)$, $f'(x)$ を変形すると

$$f(x) = (1-x)\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}(1-3x)}{6\sqrt{x}}$$

となる。 $f(x)$ は $x=a$ で極大値をとり、 $f'(a)=0$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}(1-3a)}{6\sqrt{a}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-3a &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。また、求める長さを L とおくと

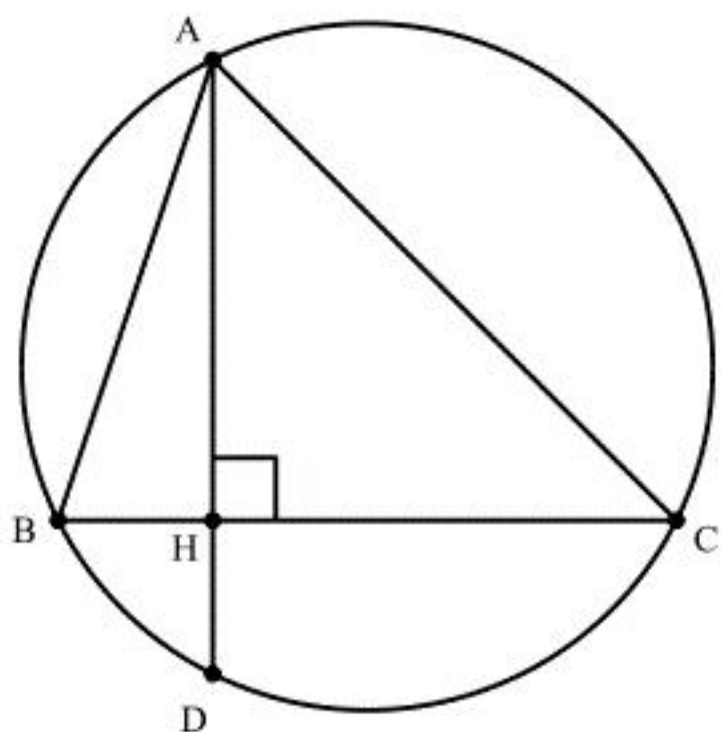
$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt{1 + \frac{(1-3x)^2}{12x}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt{\frac{9x^2 + 6x + 1}{12x}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{3x+1}{2\sqrt{3x}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{6}x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3}x^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{3}}^3 \\ &= (3+1) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
3	5	3	5	2	7

〔解説〕



BH の長さを x とおくと、三平方の定理より

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 16 - x^2$$

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 25 - (6 - x^2) = -x^2 + 12x - 11$$

と表せるから、

$$16 - x^2 = -x^2 + 12x - 11$$

$$\Leftrightarrow 12x = 27$$

$$\therefore x = \frac{9}{4}$$

となる。また、

$$CH = BC - x = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$$

であるから、

$$\frac{BH}{CH} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

となる。また、

$$AH^2 = 16 - x^2 = 16 - \frac{81}{16} = \frac{175}{16}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{5\sqrt{7}}{4} (\because AH > 0)$$

となるから、方べきの定理より、

$$BH \cdot CH = AH \cdot DH$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \cdot DH$$

$$\Leftrightarrow DH = \frac{27}{4\sqrt{7}} = \frac{27\sqrt{7}}{28}$$

となるから、

$$\frac{AH}{DH} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{28}{27\sqrt{7}} = \frac{35}{27}$$

となる。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
3	6	0	5	4	0	0

〔解説〕

Cの両隣りがともにIとなるには、ICIの3つをひとかたまりと捉え、M, E, D, N, E, ICIの6つを並べかえればよい。E2つに区別はないから、求める場合の数は

$$\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360 \text{ (通り)}$$

となる。また、CとIが隣りどうしになる並べ方は

[1] ICの順で並ぶとき

ICをひとかたまりと捉え、並べかえるから

$$\frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] CIの順で並ぶとき

[1]と同様に考えて

$$\frac{7!}{2!} = 2520 \text{ (通り)}$$

となる。

[1], [2]より、ICIの順で並ぶパターンが被っていることに注意すると

$$2520 + 2520 - 360 = 4680 \text{ (通り)}$$

となる。また、この試行における全事象は、E, I 2つずつにそれぞれ区別はないから、

$$\frac{8!}{2!2!} = \frac{40320}{4} = 10080 \text{ (通り)}$$

となる。よって、求める場合の数は、余事象を考えて、

$$10080 - 4680 = 5400 \text{ (通り)}$$

となる。

〔解答〕

セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
2	6	7	8	1	6

〔解説〕

$x+y=p$, $xy=q$ (p, q は実数) とおくと、与式は

$$2(x+y)^2 - xy - 14(x+y) + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2p^2 - q - 14p + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 2p^2 - 14p + 21 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。また、 x, y は $X^2 - pX + q = 0$ の2つの実数解であるから、この方程式における判別式を D とおくと、 x, y が実数である条件は

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4q \geq 0$$

$$\Leftrightarrow q \leq \frac{1}{4}p^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって、②の範囲における①の p のとりうる値を求めればよい。①を②に代入して q を消去すると

$$2p^2 - 14p + 21 \leq \frac{1}{4}p^2$$

$$\Leftrightarrow (p-2)(p-6) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq p \leq 6$$

である。よって

$$(x+1)(y+1) = xy + x + y + 1 = p + q + 1$$

より、 q を消去すると

$$\begin{aligned} p + q + 1 &= p + 2p^2 - 14p + 21 + 1 \\ &= 2p^2 - 13p + 22 \\ &= 2\left(p - \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

であるから、 $p + q + 1$ のとりうる値の範囲は、 $2 \leq p \leq 6$ より

$$\frac{7}{8} \leq p + q + 1 \leq 16$$

である。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
7	4	1	1	5	3

〔解説〕

与式を変形すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = a_{n+2}a_n - 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2}(1 - a_n) = a_{n+1} - a_n - 1$$

となる。 $a_n \neq 1$ のとき

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n+1} - a_n - 1}{1 - a_n}$$

と変形できる。ここで、 $n=1, 2, 3, \dots$ と代入すると

$$a_3 = \frac{3-3-1}{1-3} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{2}-3-1}{1-3} = \frac{7}{4}$$

$$a_5 = \frac{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$a_6 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{4}-1}{1-\frac{7}{4}} = 3$$

$$a_7 = \frac{3-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

となるから、この数列は5項ごとに循環していると予想される。よって、数学的帰納法を利用して、 $a_{n+5} = a_n$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき上記より、 $a_6 = a_1 = 3$ であるため成り立つ。[2] $n=2$ のとき上記より、 $a_7 = a_2 = 3$ であるため成り立つ。[3] $n=k, k+1$ で成り立つと仮定して、 $n=k+2$ のとき $a_{k+5} = a_k, a_{k+6} = a_{k+1}$ は成り立つから、

$$a_{k+7} = \frac{a_{k+6} - a_{k+5} - 1}{1 - a_{k+5}}$$

$$= \frac{a_{k+1} - a_k - 1}{1 - a_k}$$

$$= a_{k+2}$$

となるため、 $n=k+2$ のときも成立する。

[1], [2], [3]より、 $a_{n+5} = a_n$ は全ての自然数 n において成立するから、数列 $\{a_n\}$ は5項ごとに循環する。よって、

$$a_{104} = a_4 = \frac{7}{4}$$

となる。ここで、5項を1つの群とみなし、その群の和を $S = \sum_1^5 a_n$ とおくと

$$S = 3 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{35}{4} = 8.75$$

であり、また

$$230S = 2012.5 < 2019 < 2021.25 = 231S$$

であるから、求める N は第231群にある項のものであり、また

$$2012.5 + 3 + 3 + \frac{1}{2} = 2019$$

であるため、求める N は第231群の3つ目の項であると分かる。よって、

$$N = 230 \cdot 5 + 3 = 1153$$

となる。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ
2	9	3	8

〔解説〕

原点に対して点対称な関数を奇関数といい、その関数を $y = h_1(x)$ と定義すると

$h_1(x) = -h_1(-x)$ が成り立つ。ここで、与式 $y = x^3 + x^2 + ax$ を奇関数になるよう平行移動して考える。元の関数は x 軸上のある点に関して対称であるから、原点に関して対称になるように x 軸方向に p 平行移動させたものを $y = f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-p)^3 + (x-p)^2 + a(x-p) \\ &= x^3 - (3p-1)x^2 + (3p^2-2p+a)x - (p^3-p^2+ap) \end{aligned}$$

となる。これは奇関数であるから、 $f(x) = -f(-x)$ となるため

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ \Leftrightarrow x^3 - (3p-1)x^2 + (3p^2-2p+a)x - (p^3-p^2+ap) &= x^3 + (3p-1)x^2 + (3p^2-2p+a)x + (p^3-p^2+ap) \end{aligned}$$

となる。これは恒等式であるから、係数比較して

$$\begin{aligned} -(3p-1) &= (3p-1) \\ \Leftrightarrow 6p &= 2 \\ \therefore p &= \frac{1}{3} \\ -(p^3-p^2+ap) &= (p^3-p^2+ap) \\ \Leftrightarrow p^3-p^2+ap &= 0 \end{aligned}$$

$p = \frac{1}{3}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a - \frac{2}{27} &= 0 \\ \therefore a &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる。また、 y 軸対称な関数を偶関数といい、その関数を $y = h_2(x)$ とおくと、

$h_2(x) = h_2(-x)$ が成り立つ。同様に与式 $y = x^4 + x^3 + x^2 + bx$ を y 軸に関して対称になるように x 軸方向に q 平行移動させたものを $y = g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-q)^4 + (x-q)^3 + (x-q)^2 + b(x-q) \\ &= x^4 + (-4q+1)x^3 + (6q^2-3q+1)x^2 + (-4q^3+3q^2-2q+b)x + (q^4-q^3+q^2-bq) \end{aligned}$$

となる。これは偶関数であるから、 $g(x) = g(-x)$ が成り立つため、

$$\begin{aligned} g(x) &= g(-x) \\ \Leftrightarrow x^4 + (-4q+1)x^3 + (6q^2-3q+1)x^2 + (-4q^3+3q^2-2q+b)x + (q^4-q^3+q^2-bq) \\ &= x^4 - (-4q+1)x^3 + (6q^2-3q+1)x^2 - (-4q^3+3q^2-2q+b)x + (q^4-q^3+q^2-bq) \end{aligned}$$

となる。これは恒等式であるから、係数比較して

$$\begin{aligned} -4q+1 &= 4q-1 \\ \Leftrightarrow 8q &= 2 \\ \therefore q &= \frac{1}{4} \\ -4q^3+3q^2-2q+b &= 4q^3-3q^2+2q-b \\ \Leftrightarrow 4q^3-3q^2+2q-b &= 0 \end{aligned}$$

$q = \frac{1}{4}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} - \frac{3}{16} + \frac{1}{2} - b &= 0 \\ \therefore b &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

サ	シ	ス	セ	ソ
2	2	1	2	4

〔解説〕

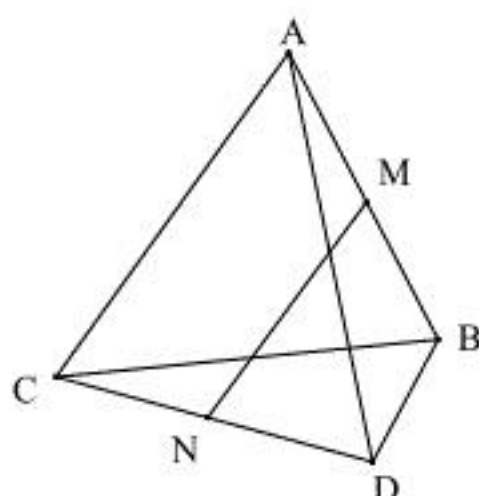
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおく。また, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ である。

AB, CD の中点をそれぞれ M, N とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \vec{b} \\ \overrightarrow{AN} &= \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{d}\end{aligned}$$

となるから, MN の長さは

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MN}|^2 &= |\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} |\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{d} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \\ |\overrightarrow{MN}| &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



となる。また, 3点 A, B, C を頂点とする三角形を直線 CD のまわりに 1 回転すると, 線分 CA と線分 NA を回転させてできる円錐から線分 CM と線分 NM を回転させてできる円錐を除いた立体ができる。正四面体の対称性から, 線分 AB は点 N を通り, 線分 CD に対して垂直な面上に存在している。よって, 線分 NA, NM を回転させてできる円を底面とすると, その円錐の高さは CN となる。それぞれの体積を V, V' とおくと

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot CN \cdot \pi \cdot NA^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V' &= \frac{1}{3} \cdot CN \cdot \pi \cdot NM^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \pi\end{aligned}$$

となるから, 求める体積は

$$V - V' = \frac{1}{8} \pi - \frac{1}{12} \pi = \frac{1}{24} \pi$$

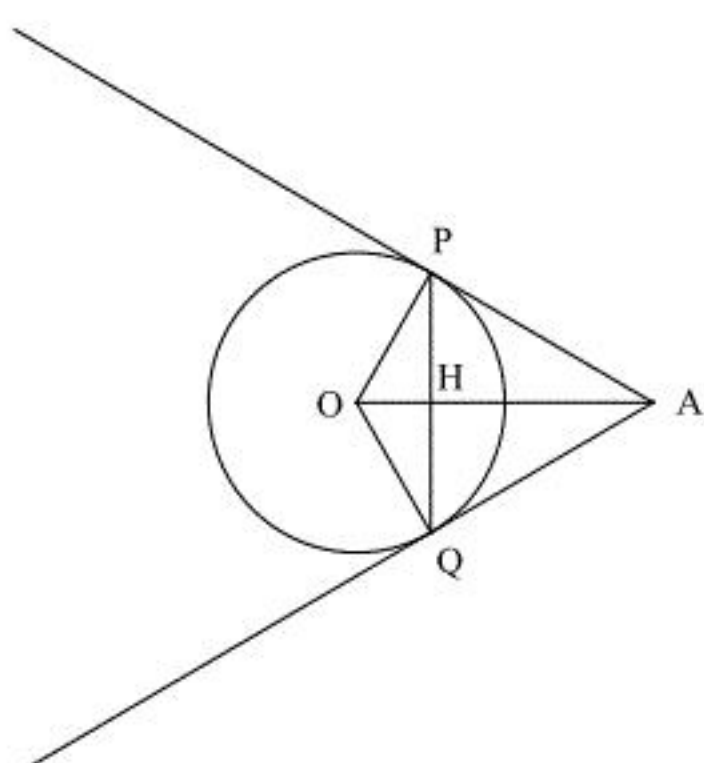
となる。

【解答】

タ	チ	ツ	テ	ト
6	5	1	2	2

【解説】

$(0, 1, 2)$ を点 A, 原点を O とおき, 線分 AO を含む任意の平面を考えると下図のようになる。



ここで, 接点を P, Q とおき, ここから線分 AO に下した垂線の足を H とする。

$$PO = \sqrt{3}$$

$$AO = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

であるから三平方の定理より

$$\begin{aligned} PA &= \sqrt{AO^2 - PO^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。ここで, $\triangle APO$ と $\triangle AHP$ について二角相等より

$$\triangle APO \sim \triangle AHP$$

であるから

$$AO : OP = PA : PH$$

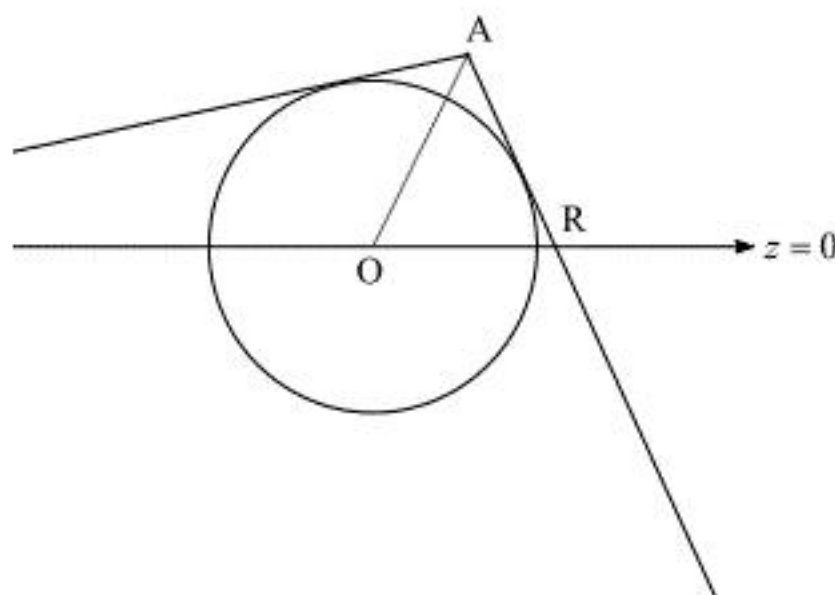
$$\Leftrightarrow PH = \frac{OP \cdot PA}{AO}$$

$$\Leftrightarrow PH = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

となり, 求める円の面積を S とおくと,

$$S = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{30}}{5} \right)^2 = \frac{6}{5} \pi$$

となる。このとき, 平面 $z=0$ と点 A, O の関係は下図のようになる。



点 A から球に引いた接線のひとつと平面 $z=0$ の交点を $R(x, y, 0)$ とする。ここで

$$\begin{aligned} \cos \angle OAR &= \frac{AP}{OA} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

であるから $\overrightarrow{AO}$ と $\overrightarrow{AR}$ の内積について考えると

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AR} = |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AR}| \cdot \cos \angle OAR$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ -2 \end{pmatrix} = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (-2)^2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5 - y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (5-y)^2 = 2x^2 + 2(y-1)^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (y+3)^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{(y+3)^2}{2} = 12$$

となる。よってこの図形は $(x, y) = (0, -3)$ を中心とする, 長軸 $4\sqrt{6}$, 短軸 $4\sqrt{3}$ の楕円であるから, 求める面積は

$$\pi \cdot 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{2}\pi$$

である。