

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
3	4	2	3	7	3

〔解説〕

2つの放物線 $y = x^2 + 2x - 2$ と $y = -x^2 + 4x + 10$ の共有点の x 座標は、2つの式から y を消去して得られる x についての2次方程式の解であるため、

$$x^2 + 2x - 2 = -x^2 + 4x + 10$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -2, 3$$

である。ゆえに、2つの共有点の座標は $(-2, -2)$ と $(3, 13)$ である。したがって、この2つの共有点を通る直線の方程式は、

$$y + 2 = \frac{-2 - 13}{-2 - 3}(x + 2)$$

$$\therefore y = 3x + 4$$

となる。原点を通り、 y 軸に平行な軸をもつ放物線の方程式を $y = ax^2 + bx$ とおく。この放物線が $(-2, -2)$ 、 $(3, 13)$ を通るとき、 a, b は

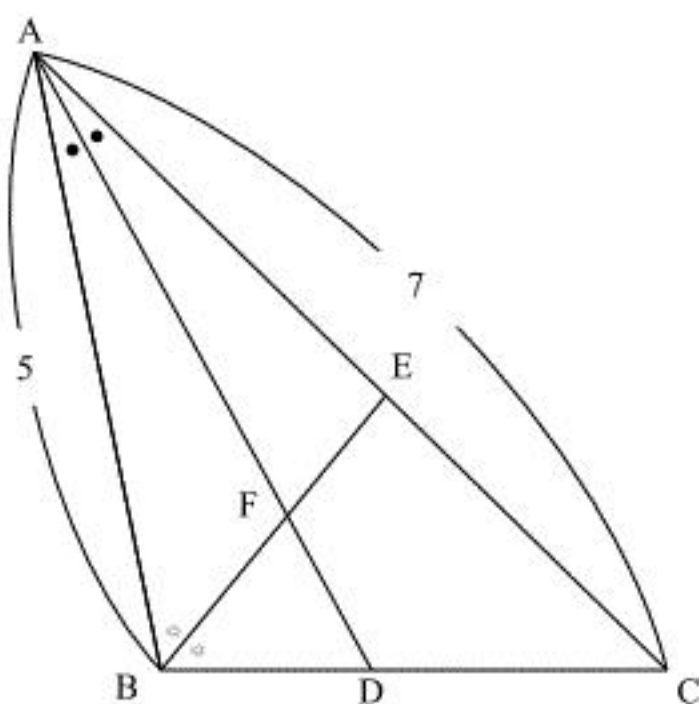
$$\begin{cases} -2 = 4a - 2b \\ 13 = 9a + 3b \end{cases}$$

を満たす。この連立方程式を解くと、 $a = \frac{2}{3}$ 、 $b = \frac{7}{3}$ を得る。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ
5	3	9	7

〔解説〕



線分 BF は $\angle B$ を 2 等分するため、角の 2 等分線の定理より、

$$AB:BD = AF:FD$$

である。また、問題文より $AF:FD = 3:1$ であるから、

$$AB:BD = 3:1$$

である。 $AB = 5$ であるから、

$$BD = \frac{AB}{3} = \frac{5}{3}$$

となる。 $\triangle BCE$ と線分 AD についてメネラウスの定理より、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EF}{FB} = 1$$

が成り立つ。ここで、線分 AD は $\angle A$ を 2 等分するため、

$$\begin{aligned} BD:DC &= AB:AC \\ &= 5:7 \end{aligned}$$

である。 $BD = \frac{5}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} BC &= BD + DC \\ &= BD + \frac{7}{5}BD \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。線分 BE は $\angle B$ を 2 等分するため、

$$\begin{aligned} CE:EA &= BC:AB \\ &= 4:5 \end{aligned}$$

$$\therefore CA:AE = 9:5$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{BF}{EF} &= \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CA}{AE} \\ &= \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{5} \\ &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

サ	シ	ス	セ
-	6	8	9

〔解説〕

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \\&= (x + y + z)\{(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)\} + 3xyz\end{aligned}$$

であるから、 $x + y + z = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 = 13$, $xyz = -2$ を代入すると、

$$\begin{aligned}13 &= 1 \cdot \{1^2 - 3(xy + yz + zx)\} + 3 \cdot (-2) \\ \therefore xy + yz + zx &= -6\end{aligned}$$

となる。次に、 $x^4 + y^4 + z^4$ について、

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\&= 1^2 - 2 \cdot (-6) \\&= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= (xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z) \\&= (-6)^2 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 \\&= 40\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + z^4 &= 13^2 - 2 \cdot 40 \\&= 89\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
1	3	2	6	2

〔解説〕

$\overrightarrow{AB}$ について、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 13 \end{aligned}$$

である。ゆえに、 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ となる。また、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ についても同様に

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}} = \sqrt{\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB})} = 5 \\ |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB}} = \sqrt{\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \angle AOB < \pi$ より $0 < \sin \angle AOB \leq 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \angle AOB &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle OAB$ の外接円の半径を R とすると、 $\triangle OAB$ において正弦定理より

$$\begin{aligned} R &= \frac{AB}{2 \sin \angle AOB} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{26}}{2} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

カ	キ	ク	ケ	コ
2	4	2	2	6

〔解説〕

2つの曲線が第1象限において接するとき、 y を消去して得られる x についての方程式が $x > 0$ の範囲で重解を持つ。つまり、

$$x^2 + a^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 1)x^4 + (2a^2 - 1)x^2 + a^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が $x > 0$ の範囲で重解を持つ。正の実数 t を用いて $t = x^2$ とおくと、

$$(a^2 + 1)t^2 + (2a^2 - 1)t + a^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せ、 $\textcircled{1}$ が $x > 0$ の範囲で重解を持つとき $\textcircled{2}$ も $t > 0$ の範囲で重解を持つ。ここで、 $\textcircled{2}$ の判別式を D とおくと、

$$D = (2a^2 - 1)^2 - 4a^2(a^2 + 1)$$

$$= -8a^2 + 1$$

である。重解を持つとき、 $D = 0$ となるため、

$$a^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

である。 $y = a \left(x + \frac{1}{x} \right)$ が第1象限で接するため、 $a > 0$ が必要である。ゆえに、 $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ であ

る。 $\textcircled{2}$ に $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ を代入すると、

$$\frac{9}{8}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}(3t - 1)^2 = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}$$

となり、 $t > 0$ を満たす。すなわち、接点の座標は、 $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$ となる。このとき、接

線の方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y = 1$$

$$\therefore \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$$

となる。

〔解答〕

サ	シ	ス	セ
3	5	8	7

〔解説〕

$n+4$ が 13 の倍数であり、 $n+13$ が 4 の倍数であるため、自然数 n は正の整数 k, l を用いて

$$\begin{cases} n+4=13k \\ n+13=4l \end{cases}$$

と表せる。ただし、 $k \geq 1$ かつ $l \geq 4$ である。上式から n を消去すると、

$$\begin{aligned} 13k-4 &= 4l-13 \\ \Leftrightarrow 13(k+1) &= 4(l+1) \end{aligned}$$

となる。4 と 13 は互いに素な自然数であるため、 k, l は正の整数 p, q を用いて

$$\begin{cases} k=4p-1 \\ l=13q-1 \end{cases}$$

と表せる。ゆえに、

$$\begin{aligned} n &= 13k-4 \\ &= 13(4p-1)-4 \\ &= 52p-17 \end{aligned}$$

である。

[1] p が偶数のとき

正の整数 r を用いて $p=2r$ とおくと、

$$\begin{aligned} n &= 104r-17 \\ &= 104(r-1)+87 \end{aligned}$$

と表せるため、 n を 104 で割った余りは 87 となる。

[2] p が奇数のとき

正の整数 r を用いて $p=2r-1$ とおくと、

$$\begin{aligned} n &= 52(2r-1)-17 \\ &= 104r-69 \\ &= 104(r-1)+35 \end{aligned}$$

と表せるため、 n を 104 で割った余りは 35 となる。

以上、[1], [2] より、 n を 104 で割った余りは 35 または 87 となる。

〔解答〕

ソ	タ	チ	ツ
2	4	8	4

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_{30} &= \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} x_i \\
 &= \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^{27} x_i + x_{28} + x_{29} + x_{30} \right) \\
 &= \frac{1}{30} (27 \cdot 8 + x_{28} + x_{29} + x_{30})
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\bar{x}_{30} \geq 8$ であるから、

$$\frac{1}{30} (27 \cdot 8 + x_{28} + x_{29} + x_{30}) \geq 8$$

$$\Leftrightarrow x_{28} + x_{29} + x_{30} \geq 24$$

である。ゆえに、 $x_{28} + x_{29} + x_{30}$ がとり得る最小の値は 24 である。また、 $1 \leq x \leq 10$ であるから、 $x_{28} + x_{29} + x_{30}$ がとり得る最大の値は 30 である。正の整数 k を用いて、 $x_{28} + x_{29} + x_{30} = k$ ($24 \leq k \leq 30$) とおく。正の整数 i を用いて $x_{28} = i$ とおくと、 i の値のとり得る範囲は、 $x_{29}, x_{30} \leq 10$ より、 $x_{28} = k - x_{29} - x_{30} \geq k - 20$ であるため、

$$k - 20 \leq i \leq 10$$

である。このとき、 $x_{29} + x_{30} = k - i$ であるため、 x_{29} のとり得る値の範囲は、

$$k - i - 10 \leq x_{29} \leq 10$$

である。 x_{29} が定まると x_{30} は一意に定まるため、 (x_{29}, x_{30}) の組の個数は、

$10 - (k - i - 10) + 1 = 21 + i - k$ (個) である。よって、 $x_{28} + x_{29} + x_{30} = k$ のとき、 $k - 20 \leq i \leq 10$ であることから、 (x_{28}, x_{29}, x_{30}) の組の個数は、

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=k-20}^{10} (21 + i - k) &= \sum_{m=1}^{31-k} m \\
 &= \frac{1}{2} (31 - k)(32 - k) \text{ (個)}
 \end{aligned}$$

となる。 $24 \leq k \leq 30$ であることから、題意を満たす組の個数は、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=24}^{30} \frac{1}{2} (31 - k)(32 - k) &= \sum_{m=1}^7 \frac{1}{2} m(m+1) \\
 &= 84 \text{ (個)}
 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
3	2	3	6

〔解説〕

 S_0 について,

$$S_0 = \sum_{k=0}^{32} {}_{32}C_k$$

である。ここで、二項定理より、

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{k=0}^{32} {}_{32}C_k \\ &= 2^{32} \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $\log_2 S_0 = 32$ である。 S_1 について、

$$S_1 = \sum_{k=0}^{32} k \cdot {}_{32}C_k$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} k \cdot {}_{32}C_k &= k \cdot \frac{32!}{k! \cdot (32-k)!} \\ &= \frac{32!}{(k-1)! \cdot (32-k)!} \\ &= 32 \cdot \frac{31!}{(k-1)! \cdot \{31-(k-1)\}!} \\ &= 32 \cdot {}_{31}C_{k-1} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{32} k \cdot {}_{32}C_k \\ &= \sum_{k=1}^{32} 32 \cdot {}_{31}C_{k-1} \\ &= 32 \cdot 2^{31} \\ &= 2^{36} \end{aligned}$$

となる。すなわち、 $\log_2 S_1 = 36$ である。

〔解答〕

オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
2	2	3	2	8	2	4

〔解説〕

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \text{ であるため,}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

である。ゆえに,

$$2 \tan \frac{\alpha}{2} = 1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tan \frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore \tan \frac{\alpha}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

となる。 $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8}$ より $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ であるため、 $\tan \frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{2}$ である。 $\tan \frac{\beta}{2}$ についても同様に,

$$\tan \beta = \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$\Leftrightarrow -1 = \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{\beta}{2} - 2 \tan \frac{\beta}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore \tan \frac{\beta}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

となる。 $0 < \frac{\beta}{2} = \frac{3}{8}\pi < \frac{\pi}{2}$ であることから、 $\tan \frac{\beta}{2} > 0$ であるため、 $\tan \frac{\beta}{2} = 1 + \sqrt{2}$ である。すな

わち、 $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = 2\sqrt{2}$ である。 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ について,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \int_0^1 \frac{2}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} dx$$

であり、ここで $\sqrt{2}x - 1 = \tan \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos^2 \theta}$ である。このときの x と θ の対応は

下表のようになる。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	$-\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{8}$

ゆえに、与えられた定積分は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} d\theta \\ &= \sqrt{2} [\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \pi \end{aligned}$$

となる。次に、 $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$ について,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2 - 2x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\ &= \frac{3\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ について,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \int_0^1 \frac{2}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx$$

と書ける。 $\sqrt{2}x + 1 = \tan \phi$ とおくと、 $\frac{dx}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos^2 \phi}$ である。このときの x と ϕ の対応は下表

のようになる。

x	0	$\rightarrow$	1
ϕ	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{3}{8}\pi$

ゆえに、 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ の値は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{\tan^2 \phi + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cos^2 \phi} d\phi \\ &= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} d\phi \\ &= \sqrt{2} [\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \pi \end{aligned}$$

となる。ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= \frac{3\sqrt{2}}{16} \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \pi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

シ	ス	セ	ソ	タ
1	1	6	1	8

〔解説〕

不等式に対して $x=0$ を代入すると、 $0 \leq a - \frac{1}{4} \leq 0$ となるため、 $a = \frac{1}{4}$ が必要条件である。不

等式の中辺と右辺について、 $x \geq 0$ かつ $4(4+x) > 0$ より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{1}{4+x} &\leq bx \\ \Leftrightarrow 4+x-4 &\leq 4(4+x)bx \\ \Leftrightarrow 4bx+16b-1 &\geq 0\end{aligned}$$

となる。 $x \geq 0$ のとき常に成り立つには、 $b \geq 0$ かつ $16b-1 \geq 0$ が必要である。逆に、

$a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{16}$ のとき、中辺と右辺について、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{1}{4+x} &\leq \frac{x}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{4(4+x)} &\leq \frac{x}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4(4+x)} &\leq \frac{1}{16} \quad (\because x \geq 0)\end{aligned}$$

となり、 $4(4+x) \geq 16$ より、これは $x \geq 0$ のとき常に成立する。左辺と中辺についても、

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4+x} = \frac{x}{4(4+x)} \geq 0 \quad (\because x \geq 0)$$

となり、 $x \geq 0$ のとき常に成立する。ゆえに、 b のとり得る最小の値は $\frac{1}{16}$ である。次に、 S_n

について考える。

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{4n^2+k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{4+\frac{k}{n^2}}\end{aligned}$$

である。 $0 \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4+x} \leq \frac{x}{16}$ 、すなわち $\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} \leq \frac{x}{4+x} \leq \frac{x}{4}$ が $x \geq 0$ のとき常に成り立つため、

$x = \frac{k}{n^2}$ を代入すると、

$$\frac{k}{4n^2} - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{k}{n^2} \right)^2 \leq \frac{\frac{k}{n^2}}{4+\frac{k}{n^2}} \leq \frac{k}{4n^2}$$

となる。各辺を $k=1$ から n まで足し合わせると、

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{4n^2} - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{k}{n^2} \right)^2 \right\} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{4n^2}$$

となる。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{4n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

であるため、右辺の値は $\frac{1}{8}$ に収束する。また、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{k}{n^2} \right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16n^4} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{96n} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

であるため、左辺の値も $\frac{1}{8}$ に収束する。したがって、はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{8}$ とな

る。