

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
1	5	8	3	9

〔解説〕

$[x]$ で実数 x 以下の最大の整数を表すことにする。160 以下の自然数のうち、2 で k 回割り切れるもの、すなわち 2^k の倍数は $\left[\frac{160}{2^k}\right]$ 個存在する。160 $<$ 256 = 2^8 より、2 で 8 回以上割り切れるものは存在しないから、160! が 2 で割り切れる最大の回数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^7 \left[\frac{160}{2^k}\right] &= 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 \\ &= 158\end{aligned}$$

である。よって、160! を素因数分解すると、2 は 158 個現れる。同様にして、160 $<$ 625 = 5^4 より、160! が 5 で割り切れる最大の回数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 \left[\frac{160}{5^k}\right] &= 32 + 6 + 1 \\ &= 39\end{aligned}$$

であり、39 $<$ 158 より、160! は $10 = 2 \cdot 5$ でちょうど 39 回割り切れる。したがって 160! の末尾には 0 が 39 個連続して並ぶ。

【解答】

力	キ	ク	ケ	コ	サ
-	3	2	-	1	6

【解説】

変量 x の平均値を $\bar{x}$ とし、他の変量についても同様に表すことにする。

$$\bar{x} = \frac{2+3+1+5+1+6}{6} = 3, \quad \bar{y} = \frac{7+5+6+3+1+2}{6} = 4 \text{ より, } x \text{ と } y \text{ の共分散 } s_{xy} \text{ は}$$

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{(2-3)(7-4) + (3-3)(5-4) + (1-3)(6-4) + (5-3)(3-4) + (1-3)(1-4) + (6-3)(2-4)}{6} \\ &= \frac{-3+0-4-2+6-6}{6} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \bar{z} &= a\bar{x} + b \Leftrightarrow 0 = 3a + b \\ \bar{w} &= a\bar{y} + b \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 4a + b \end{aligned}$$

より、 $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$ と求められる。ここで、 $z - \bar{z} = (ax + b) - (a\bar{x} + b) = a(x - \bar{x})$ であり、

$w - \bar{w} = a(y - \bar{y})$ であるから、 $(z - \bar{z})(w - \bar{w}) = a^2(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} s_{zw} &= a^2 s_{xy} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

シ	ス	セ	ソ
1	6	1	0

【解説】

$$x^2 = 10 - 2\sqrt{21} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}
 20x^2 - x^4 &= x^2(20 - x^2) \\
 &= (10 - 2\sqrt{21})(10 + 2\sqrt{21}) \\
 &= 10^2 - (2\sqrt{21})^2 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

である。また、上式の両辺を $x^2 \neq 0$ で割って移項することで $x^2 + \frac{16}{x^2} = 20$ を得る。これを用

いて、

$$\begin{aligned}
 \frac{32}{x^3} - \frac{32}{x^2} - \frac{56}{x} + 50 + 22x - 2x^2 - x^3 &= -2\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + 20x - \frac{56}{x} + 50 - x^3 \\
 &= -2 \cdot 20 + \frac{2}{x} \cdot 20 + 20x - \frac{56}{x} + 50 - x^3 \\
 &= 10 - \frac{16}{x} + 20x - x^3 \\
 &= 10 - x\left(\frac{16}{x^2} + x^2\right) + 20x \\
 &= 10 - 20x + 20x \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
4	9	9	1	9

【解説】

1の目が5回出て、かつ2の目が k 回出る確率は、

$$\begin{aligned}
 P(k) &= {}_{104}C_5 \cdot {}_{99}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{99-k} \\
 &= {}_{104}C_5 \cdot {}_{99}C_k \frac{4^{99-k}}{6^{104}}
 \end{aligned}$$

となるから、 $\frac{P(0)}{P(1)} = \frac{{}_{104}C_5 \cdot {}_{99}C_0 \frac{4^{99}}{6^{104}}}{{}_{104}C_5 \cdot {}_{99}C_1 \frac{4^{98}}{6^{104}}} = \frac{4}{99}$ である。また、 $0 \leq k < 99$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \frac{P(k)}{P(k+1)} &= \frac{{}_{104}C_5 \cdot {}_{99}C_k \frac{4^{99-k}}{6^{104}}}{{}_{104}C_5 \cdot {}_{99}C_{k+1} \frac{4^{98-k}}{6^{104}}} \\
 &= \frac{99!}{(99-k)!k!} \cdot 4 \\
 &= \frac{99!}{(98-k)!(k+1)!} \\
 &= \frac{4(k+1)}{99-k}
 \end{aligned}$$

となり、 $\frac{P(k)}{P(k+1)} < 1$ とすると、

$$\begin{aligned}
 \frac{4(k+1)}{99-k} &< 1 \\
 \Leftrightarrow 4k+4 &< 99-k \quad (\because k < 99) \\
 \Leftrightarrow k &< 19
 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$P(0) < P(1) < P(2) < \dots < P(19) \geq P(20) \geq \dots \geq P(99)$$

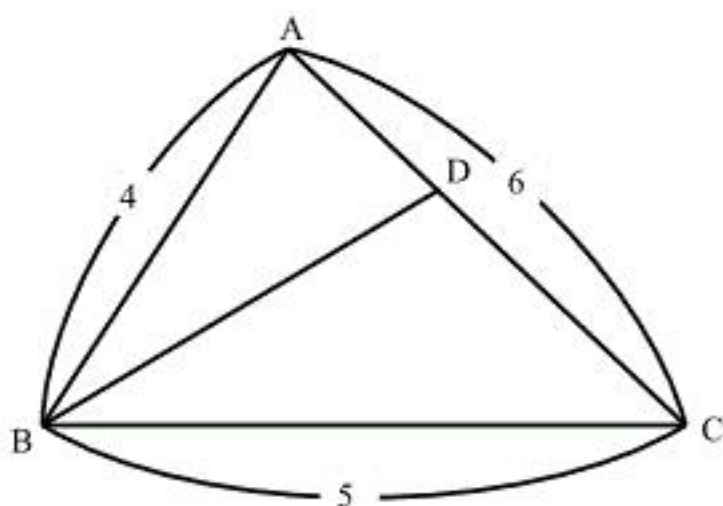
となるから、 $P(k)$ を最大にする k の値のうち最小のものは19である。

【解答】

カ	キ	ク	ケ	コ
1	0	3	7	2

【解説】

問題の図形は下図のようになる。



$\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$25 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos \angle BAC$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos \angle BAC = 27$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle BAC = \frac{9}{16}$$

が得られる。次に線分 BD は $\angle ABC$ の二等分線より $AD = 6 \cdot \frac{AB}{AB+BC} = 6 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{3}$ であるから、

$\triangle ABD$ において余弦定理より、

$$BD^2 = 16 + \frac{64}{9} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} \cos \angle BAC$$

$$= 16 + \frac{64}{9} - 12$$

$$= \frac{100}{9}$$

$$\therefore BD = \frac{10}{3}$$

となる。ここで、 $\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$ であるから、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

である。したがって、求める内接円の半径を r とすると、

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2} r (4 + 5 + 6)$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

となる。

〔解答〕

サ	シ	ス	セ	ソ
-	7	4	4	7

〔解説〕

与式は2次方程式であるため、 $m \neq 0$ である。与式の判別式を D とすると、2次方程式が異なる2つの実数解を持つ条件は

$$\begin{aligned}
 D &> 0 \\
 &\Leftrightarrow m^2 - 4m^2(m+2) > 0 \\
 &\Leftrightarrow -4m^3 - 7m^2 > 0 \\
 &\Leftrightarrow m^2(4m+7) < 0 \\
 &\Leftrightarrow 4m+7 < 0 \quad (\because m^2 > 0) \\
 &\Leftrightarrow m < -\frac{7}{4} \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。また、 $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ であり、2次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{1}{m}, \quad \alpha\beta = \frac{m+2}{m^2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\
 &= \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m+2}{m^2} \\
 &= -\frac{4m+7}{m^2} \\
 &= -7 \left\{ \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{4}{7} \left(\frac{1}{m}\right) \right\} \\
 &= -7 \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{7} \right)^2 + \frac{4}{7} \\
 &\leq \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、上式の等号が成立するのは $\frac{1}{m} + \frac{2}{7} = 0$ 、すなわち $m = -\frac{7}{2}$ のときであり、こ

れは①を満たすから、 $(\alpha - \beta)^2$ の最大値は $\frac{4}{7}$ となる。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
-	1	9	6	1	1

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_{n+1}-3} - \frac{1}{a_n-3} &= \frac{1}{\frac{6a_n+9}{12-a_n}-3} - \frac{1}{a_n-3} \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{12-a_n}{a_n-3} - \frac{1}{a_n-3} \\
 &= \frac{3-a_n}{9(a_n-3)} \\
 &= -\frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_n-3} &= \frac{1}{a_1-3} - \frac{1}{9}(n-1) \\
 &= \frac{1}{\frac{3}{2}-3} - \frac{1}{9}(n-1) \\
 &= -\frac{n+5}{9}
 \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\begin{aligned}
 a_n-3 &= -\frac{9}{n+5} \\
 \therefore a_n &= 3 - \frac{9}{n+5}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{50} \frac{a_k}{(k+2)(k+4)} &= \sum_{k=1}^{50} \frac{3 \cdot \frac{k+2}{k+5}}{(k+2)(k+4)} \\
 &= 3 \cdot \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{(k+4)(k+5)} \\
 &= 3 \cdot \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} \right) \\
 &= 3 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{55} \right) \\
 &= \frac{6}{11}
 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

キ	ク	ケ	コ	サ	シ
1	3	2	2	3	4

〔解説〕

$A_\theta(x, y)$ とおく。 $\cos\theta=0$ 、すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき、半直線は $x=0$ ($y\geq 0$)となる。これを

$x^2+4xy+5y^2=1$ に代入すると $y^2=\frac{1}{5}$ となるから、このとき

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \frac{1}{OA_\theta^2} \\
 &= \frac{1}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{1}{0+\frac{1}{5}} \\
 &= 5 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。また、 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき $y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$ であり、これを $x^2+4xy+5y^2=1$ に代入すると

$$\begin{aligned}
 x^2+4x^2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+5\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2x^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow x^2\left(1+4\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+5\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) &= 1 \\
 \Leftrightarrow x^2(\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\sin^2\theta) &= \cos^2\theta \\
 \Leftrightarrow x^2(1+4\sin\theta\cos\theta+4\sin^2\theta) &= \cos^2\theta \\
 \Leftrightarrow x^2\left(1+2\sin 2\theta+4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) &= \cos^2\theta \\
 \Leftrightarrow x^2(3+2\sin 2\theta-2\cos 2\theta) &= \cos^2\theta \\
 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\cos^2\theta}{3+2\sin 2\theta-2\cos 2\theta} \quad (\because 3+2\sin 2\theta-2\cos 2\theta > 3+2\cdot 0-2\cdot 1 > 0)
 \end{aligned}$$

となる。また、 $y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$ より、 $y^2=\frac{\sin^2\theta}{3+2\sin 2\theta-2\cos 2\theta}$ が得られるから、

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \frac{1}{x^2+y^2} \\
 &= 3+2\sin 2\theta-2\cos 2\theta \\
 &= 3+2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ より、 $-\frac{\pi}{4}\leq 2\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$ であるから、 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$ で

あり、 $1\leq f(\theta)\leq 3+2\sqrt{2}$ となる。したがって、 $\textcircled{1}$ および $1<5<3+2\sqrt{2}$ より、 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のとき

き $f(\theta)$ のとり得る値の範囲は $1\leq f(\theta)\leq 3+2\sqrt{2}$ である。また、

$$\begin{aligned}
 \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nf(\theta_k) &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left\{3+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{k}{n}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
 &= \int_0^1\left\{3+2\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx \\
 &= \left[3x-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^1 \\
 &= \left(3+\frac{2}{\pi}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\right) \\
 &= 3+\frac{4}{\pi}
 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ス	セ	ソ	タ
-	2	-	3

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 \alpha^5 &= 1 \\
 \Leftrightarrow \alpha^5 - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 &= 0 \quad (\because \alpha \neq 1) \\
 \therefore \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha &= -1 \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha+1}{\alpha^4} + \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3+1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^4+1}{\alpha} \\
 &= \frac{\alpha^2 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^8 + \alpha^4}{\alpha^5} \\
 &= \alpha^2 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^3 + \alpha^4 \quad (\because \alpha^5 = 1) \\
 &= 2(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha) \\
 &= 2 \cdot (-1) \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha^4}{\alpha+1} + \frac{\alpha^3}{\alpha^2+1} + \frac{\alpha^2}{\alpha^3+1} + \frac{\alpha}{\alpha^4+1} \\
 &= \frac{\alpha^8 + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha}{(\alpha+1)(\alpha^4+1)} + \frac{\alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2}{(\alpha^2+1)(\alpha^3+1)} \\
 &= \frac{\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha}{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha + 1} + \frac{\alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2}{\alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1} \quad (\because \alpha^5 = 1) \\
 &= -\frac{1}{\alpha^4 + \alpha + 2} - \frac{1}{\alpha^3 + \alpha^2 + 2} \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= -\frac{\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 4}{(\alpha^4 + \alpha + 2)(\alpha^3 + \alpha^2 + 2)} \\
 &= -\frac{3}{\alpha^7 + \alpha^6 + 2\alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^3 + 2\alpha + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4} \\
 &= -\frac{3}{\alpha^2 + \alpha + 3\alpha^4 + 3\alpha^3 + 2\alpha + 2\alpha^2 + 4} \quad (\because \alpha^5 = 1) \\
 &= -\frac{3}{3\alpha^4 + 3\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 4} \\
 &= -\frac{3}{3(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha) + 4} \\
 &= -3 \quad (\because \textcircled{1})
 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

チ	ツ	テ	ト
5	3	1	7

【解説】

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2} \text{ より}$$

$$|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{であり, } |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{5} \text{ より}$$

$$|\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。

$$\{g(t)\}^2 = |\vec{a}|^2 - 2t(\vec{a} \cdot \vec{b}) + t^2|\vec{b}|^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となり, ①, ②より $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}|^2 - 1}{4}$, $|\vec{b}|^2 = \frac{3 - |\vec{a}|^2}{2}$ である。またここで $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0 \Rightarrow |\vec{b}| \neq 0$ より

$|\vec{a}|^2 \neq 1, 3$ であり, これらを③に代入すると,

$$\begin{aligned} \{g(t)\}^2 &= |\vec{a}|^2 - 2t \frac{|\vec{a}|^2 - 1}{4} + t^2 \frac{3 - |\vec{a}|^2}{2} \\ &= \frac{3 - |\vec{a}|^2}{2} \left(t - \frac{|\vec{a}|^2 - 1}{2(3 - |\vec{a}|^2)} \right)^2 + |\vec{a}|^2 - \frac{(|\vec{a}|^2 - 1)^2}{8(3 - |\vec{a}|^2)} \quad (\because |\vec{a}|^2 \neq 3) \end{aligned}$$

となり, $t = \frac{|\vec{a}|^2 - 1}{2(3 - |\vec{a}|^2)}$ のとき $\{g(t)\}^2$ は最小となり, $g(t) \geq 0$ より, このとき $g(t)$ も最小とな

る。その最小値は1であるから,

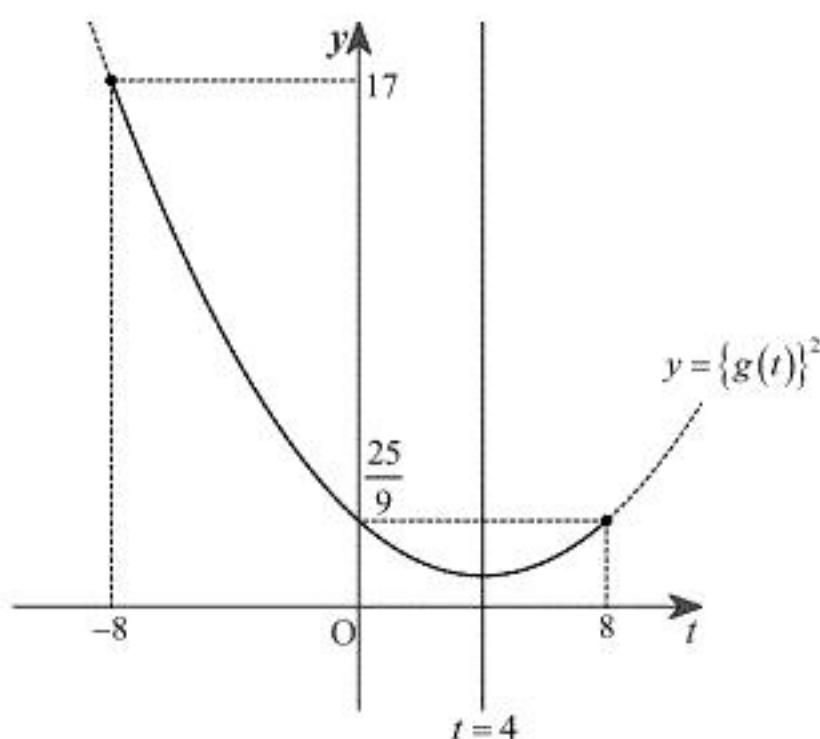
$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 - \frac{(|\vec{a}|^2 - 1)^2}{8(3 - |\vec{a}|^2)} &= 1^2 \\ \Leftrightarrow (8|\vec{a}|^4 - 24|\vec{a}|^2) + (|\vec{a}|^4 - 2|\vec{a}|^2 + 1) &= 8|\vec{a}|^2 - 24 \\ \Leftrightarrow 9|\vec{a}|^4 - 34|\vec{a}|^2 + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow (|\vec{a}|^2 - 1)(9|\vec{a}|^2 - 25) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = \frac{25}{9} \quad (\because |\vec{a}|^2 \neq 1) \\ \therefore |\vec{a}| &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。またこのとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{4}{9}$, $|\vec{b}|^2 = \frac{1}{9}$ となり, ③より,

$$\begin{aligned} \{g(t)\}^2 &= \frac{25}{9} - \frac{8}{9}t + \frac{1}{9}t^2 \\ &= \frac{1}{9}(t - 4)^2 + 1 \end{aligned}$$

である。 $y = \{g(t)\}^2$ のグラフは直線 $t = 4$ を軸とする下に凸な放物線であるから, 下図より,

$-8 \leq t \leq 8$ の範囲において $t = -8$ で $\{g(t)\}^2$ は最大となり, このとき $g(t)$ も最大となる。



したがって, 求める最大値は

$$\begin{aligned} g(-8) &= \sqrt{\frac{1}{9}(-8-4)^2 + 1} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

となる。