

【I】

【解答】

(1)	アイ							
	14							
(2)	ウエ	オカ	キク	ケコ	サシ	スセ	ソタ	チツ
	11	10	35	10	-5	11	36	11

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} &= (2-1, 1-(-1), 1-0) = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{CB} &= (-1-1, 1-(-1), 2-0) = (-2, 2, 2)\end{aligned}$$

であるため、三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \sqrt{(\|\overrightarrow{CA}\| \|\overrightarrow{CB}\|)^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(1^2 + 2^2 + 1^2) \{(-2)^2 + 2^2 + 2^2\} - \{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 12 - 4^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{56} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

となる。

(2)

点 D は直線 ℓ 上にあるため、実数 s を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= s \overrightarrow{OC} \\ &= (s, -s, 0)\end{aligned}$$

と表される。点 D の x 座標は t であるため、 $s = t$ であり、点 D の座標は $(t, -t, 0)$ である。点 E は直線 AB 上にあるため、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AB} \\ &= (2, 1, 1) + k(-1-2, 1-1, 2-1) \\ &= (-3k+2, 1, k+1)\end{aligned}$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{DE}|^2 &= |\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}|^2 \\ &= |(-3k+2-t, 1+t, k+1)|^2 \\ &= (-3k+2-t)^2 + (1+t)^2 + (k+1)^2 \\ &= \{9k^2 - 6k(2-t) + (2-t)^2\} + (t^2 + 2t + 1) + (k^2 + 2k + 1) \\ &= 10k^2 + k(6t-10) + (2t^2 - 2t + 6) \\ &= 10 \left(k + \frac{3t-5}{10} \right)^2 + (2t^2 - 2t + 6) - \frac{(3t-5)^2}{10} \\ &= 10 \left(k + \frac{3t-5}{10} \right)^2 + \frac{11t^2 + 10t + 35}{10}\end{aligned}$$

となるため、 DE^2 は $k = -\frac{3t-5}{10}$ のとき、最小値 $\frac{11t^2 + 10t + 35}{10}$ をとる。さらに、

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{11t^2 + 10t + 35}{10} \\ &= \frac{11 \left(t + \frac{5}{11} \right)^2 + 35 - \frac{5^2}{11}}{10} \\ &= \frac{11}{10} \left(t + \frac{5}{11} \right)^2 + \frac{36}{11}\end{aligned}$$

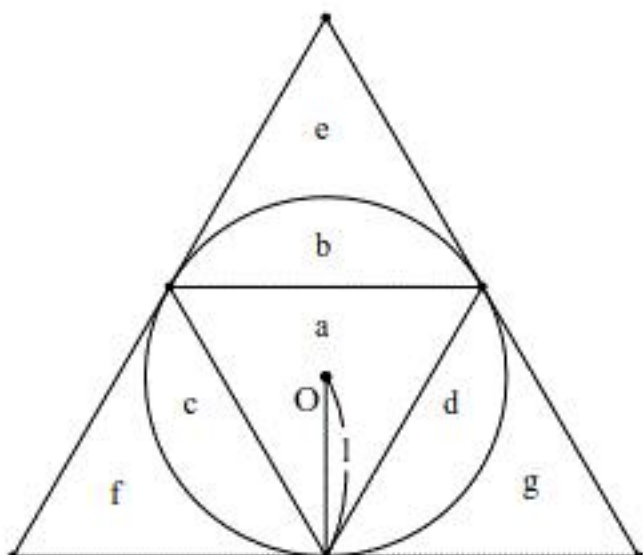
であるため、 t が全ての実数を動くとき、 $f(t)$ は $t = -\frac{5}{11}$ のとき最小値 $\frac{36}{11}$ をとる。

【Ⅱ】

〔解答〕

(1)	ア					
	2					
(2)	イ					
	6					
(3)	ウエ					
	54					
(4)	オ	カキ	ク	ケ	コ	
	2	15	3	4	4	

〔解説〕



(1) 図のように領域にa~gと名付ける。aに赤色を塗ると、b, c, dには青色を塗ることになり、したがってe, f, gには赤色を塗ることになるため、aに赤色を塗ったときの塗り分けは1通りに定まる。aに青色を塗るときも同様に塗り分けが1通りに定まるため、赤色と青色の2色で塗り分ける方法は2通りである。

(2) 赤色、青色、緑色の3色から2色を選ぶ選び方は ${}_3C_2=3$ (通り)であり、2色で塗り分ける方法は(1)より2通りであるから、赤色、青色、緑色のうち2色を用いて塗り分ける方法は $3\cdot 2=6$ (通り)である。

(3) aに赤色を塗るとする。このときb, c, dを青色または緑色で塗り分ける。ここで、b, c, dの色として最も多いものを青色とする。

[1] b, c, dのすべてを青色で塗るとき
このときe, f, gを赤色と緑色で塗り分ける。すべてを赤色で塗ると2色で塗り分けてしまうので不適である。また、すべてを緑色で塗るときの塗り分け方は1通りである。さらに、2つを赤色、1つを緑色で塗る場合は、点Oを中心に $\pm 120^\circ$ 回転させると同じになるため1通りである。また、2つを緑色、1つを赤色で塗るときも同様に1通りである。すなわち、この場合の塗り分け方は3通りである。

[2] b, c, dのうち2つを青色で塗るとき
対称性より、bに緑色を、c, dに青色を塗ったと考えてよい。このとき、eには赤色か青色の2通りを塗ることができる。次に、f, gを赤色または緑色で塗り分ける。どちらも赤色、どちらも緑色の場合が1通りずつ存在し、赤色と緑色を1色ずつ用いるときは反転させると一致するのでこの場合も1通りである。すなわち、この場合の塗り分け方は $2\cdot 3=6$ (通り)である。

以上[1], [2]より、 $3+6=9$ 通りの塗り分け方がある。aの色およびb, c, dの色として最も多いものの組み合わせは $3!=6$ (通り)あるので、赤色、青色、緑色の3色を全て用いて塗り分ける方法は $9\cdot 6=54$ (通り)である。

(4) a, e, f, gのすべてを赤色で塗るときと、b, c, dのすべてを赤色で塗るときのどちらかの場合において赤色領域の面積の総和が最大となる。

[1] a, e, f, gをあわせた部分の面積
a, e, f, gをあわせた部分は、外接三角形から円を除き、さらにaを加えた部分に等しい。
ここでaは、一辺が $\sqrt{3}$ の正三角形になることから、その面積は $\frac{1}{2}\cdot \sqrt{3}\cdot \sqrt{3}\cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ であり、外接三角形の面積はaの面積の4倍となることから、a, e, f, gをあわせた部分の面積は

$$4\cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} - \pi \cdot 1^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3} - 4\pi}{4}$$

となる。

[2] b, c, dをあわせた部分の面積
b, c, dをあわせた部分は、円からaを除いた部分に等しいので、その面積は

$$\pi \cdot 1^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

となる。

以上[1], [2]の結果を比べると

$$\begin{aligned} \frac{15\sqrt{3} - 4\pi}{4} - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4} &= \frac{9\sqrt{3} - 4\pi}{2} \\ &> \frac{9\cdot 1.7 - 4\cdot 3.2}{2} \left(\because \sqrt{3} > 1.7, \pi < 3.2 \right) \\ &= 1.25 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるため、[1]のa, e, f, gを赤色で塗るときが赤色領域の面積の総和が最大となり、その値は $\frac{15\sqrt{3} - 4\pi}{4}$ である。このとき、3色を全て用いるという条件より、b, c, dのうち2箇所を青色で1箇所を緑色、または2箇所を緑色で1箇所を青色で塗ることになり、それぞれの塗り方は点Oを中心に $\pm 120^\circ$ 回転させると一致するため、塗り分ける方法は2通りである。

【Ⅲ】

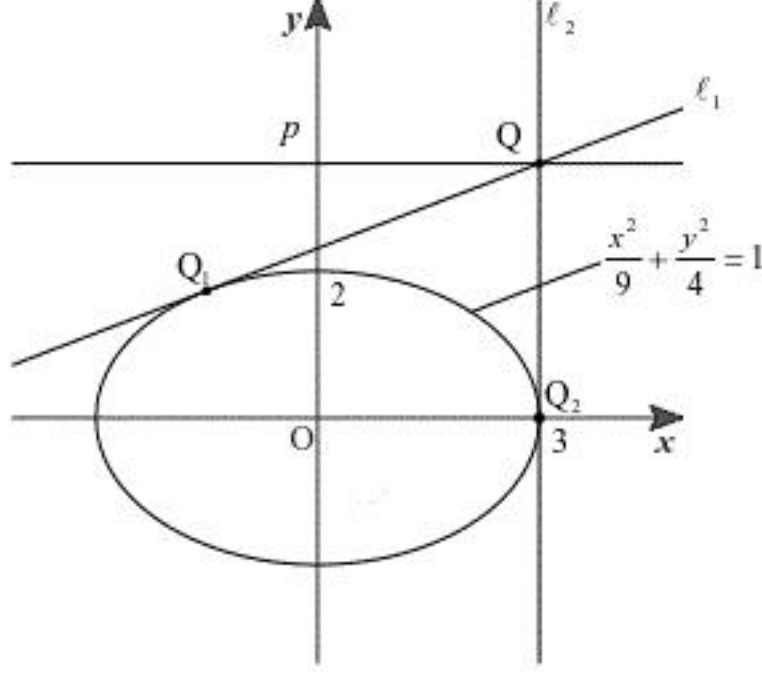
【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オカ	キ	ク
	3	0	4	6	12	3	4
(2)	ケコ	サ	シ	ス	セ	ソ	
	-3	2	8	3	3	4	
(3)	タチ	ツ	テ	ト	ナニ	ヌネ	
	13	2	9	4	36	13	

【解説】

(1)

点Qを通る直線 $x=3$ は下図のように点 $(3, 0)$ で楕円に接する。このときもう一つの接点の x 座標は3より小さいため、直線 $x=3$ が ℓ_2 であり、接点 Q_2 の座標は $(3, 0)$ である。



ℓ_1 は y 軸に平行でないため、傾きを m (m は実数)とおくことができ、 ℓ_1 は点 (t, p) を通るので、 ℓ_1 の方程式は、

$$\begin{aligned} y-p &= m(x-t) \\ \Leftrightarrow y &= mx + (p-mt) \end{aligned}$$

である。これが楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に接するので、 x の2次方程式

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{\{mx + (p-mt)\}^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 9\{m^2x^2 + 2m(p-mt)x + (p-mt)^2\} &= 36 \\ \Leftrightarrow (9m^2 + 4)x^2 + 18m(p-mt)x + \{9(p-mt)^2 - 36\} &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

は重解を持つ。よって判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{9m(p-mt)\}^2 - (9m^2 + 4)\{9(p-mt)^2 - 36\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{81m^2 - 9(9m^2 + 4)\}(p-mt)^2 + 36(9m^2 + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9m^2 + 4 - (p-mt)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9m^2 + 4 - (p^2 - 2pmt + m^2t^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (9-t^2)m^2 + 2ptm + (4-p^2) &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。 $t=3$ を②に代入して、

$$\begin{aligned} 6pm + (4-p^2) &= 0 \\ \therefore m &= \frac{p^2-4}{6p} \quad (\because 6p \neq 0) \end{aligned}$$

が得られるため、 ℓ_1 の傾きは $\frac{p^2-4}{6p}$ である。また、 x_1 は①の重解であるため

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{18m(p-mt)}{2(9m^2+4)} \\ &= -\frac{9(p^2-4)\{6p^2-3(p^2-4)\}}{9(p^2-4)^2+4(6p)^2} \\ &= -\frac{3(p^2-4)(p^2+4)}{(p^2+4)^2} \\ &= \frac{12-3p^2}{4+p^2} \end{aligned}$$

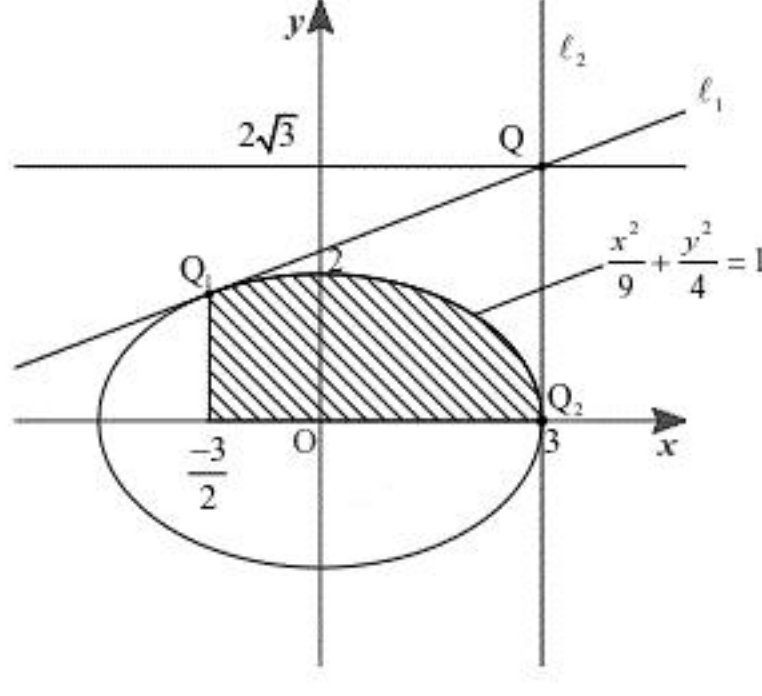
である。

(2)

$x_1 = \frac{12-3p^2}{4+p^2}$ に $p=2\sqrt{3}$ を代入して、

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12-3(2\sqrt{3})^2}{4+(2\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{-24}{16} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となり、求める面積は以下の斜線部の面積となる。



楕円の $0 \leq y$ の部分は $y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$ で表されるため、求める面積は $\int_{-\frac{3}{2}}^3 \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} dx$ により与えられる。ここで $x=3\sin t$ とすると $dx=3\cos t dt$ であり、

x	$-\frac{3}{2}$	$\rightarrow$	3
t	$-\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{2}}^3 \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - \frac{4}{9}(3\sin t)^2} (3\cos t dt) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos^2 t dt \\ &= 6 \cdot \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= 6 \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{3}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

が得られる。

(3)

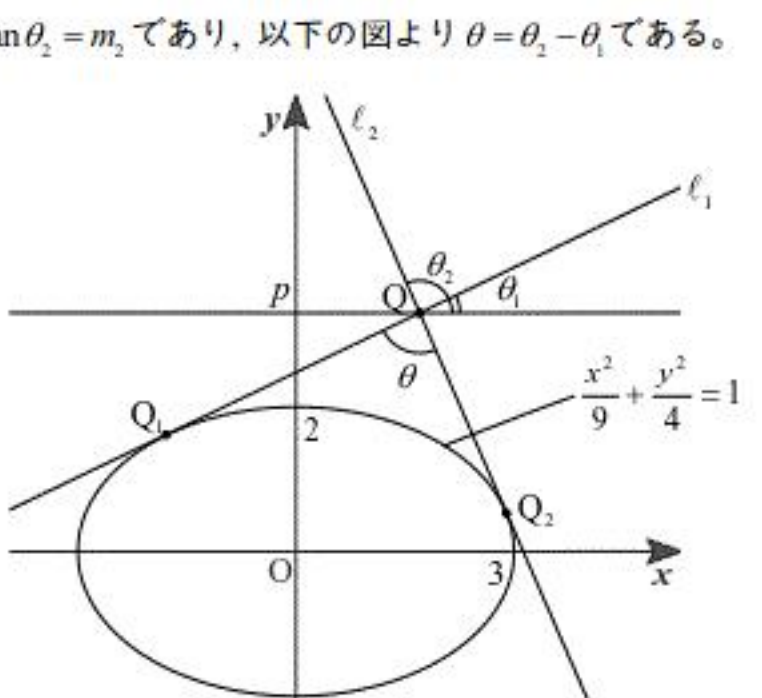
$t \neq 3$ のとき ℓ_1, ℓ_2 は y 軸に平行でないため、傾きをそれぞれ m_1, m_2 (m_1, m_2 は実数)とおくと、 m_1, m_2 は m の2次方程式②の異なる2つの実数解となる。よって、解と係数の関係より

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = -\frac{2pt}{9-t^2} \\ m_1 m_2 = \frac{4-p^2}{9-t^2} \end{cases}$$

である。 ℓ_1, ℓ_2 が直交するとき、 $m_1 m_2 = -1$ であるため、

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{4-p^2}{9-t^2} \\ \therefore p^2 + t^2 &= 13 \end{aligned}$$

である。また、 ℓ_1, ℓ_2 が直交しないとき、 ℓ_1, ℓ_2 が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると、 $\tan \theta_1 = m_1, \tan \theta_2 = m_2$ であり、以下の図より $\theta = \theta_2 - \theta_1$ である。



したがって、

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta &= \tan^2 (\theta_2 - \theta_1) \\ &= \left(\frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \right)^2 \\ &= \frac{(m_2 - m_1)^2}{(1 + m_1 m_2)^2} \\ &= \frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}{\left(1 + \frac{4-p^2}{9-t^2} \right)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{2pt}{9-t^2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{4-p^2}{9-t^2}}{\left(\frac{13-p^2-t^2}{9-t^2} \right)^2} \\ &= \frac{4p^2 t^2 - 4(4-p^2)(9-t^2)}{(p^2 + t^2 - 13)^2} \\ &= \frac{4(9p^2 + 4t^2 - 36)}{(p^2 + t^2 - 13)^2} \end{aligned}$$

より、 $|\tan \theta| = \sqrt{\frac{4(9p^2 + 4t^2 - 36)}{(p^2 + t^2 - 13)^2}} = \frac{2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36}}{|p^2 + t^2 - 13|}$ である。