

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ						
	－	1	－	8	3	2						
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	0	0	1	6	0	－	1	6	－	6	4	

【解説】

$f(x)=4x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ より,
 $f'(x)=16x^3+3ax^2+2bx+c$

である。 $f(x)$ は $x^2-2x+1=(x-1)^2$ で割り切れるから、

$f(1)=0$
 $\Leftrightarrow 4+a+b+c+d=0 \qquad \cdots \textcircled{1}$

となる。また、 $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を $Q(x)$ とすると、 $f(x)=Q(x)\cdot(x-1)^2$ と表される

から、

$f'(x)=Q'(x)\cdot(x-1)^2+Q(x)\cdot 2(x-1)$
 $= (x-1)\{Q'(x)\cdot(x-1)+2Q(x)\}$

となる。よって、

$f'(1)=0$
 $\Leftrightarrow 16+3a+2b+c=0 \qquad \cdots \textcircled{2}$

となる。また $f'(x)$ は $x+1$ で割り切れるから、

$f'(-1)=0$
 $\Leftrightarrow -16+3a-2b+c=0 \qquad \cdots \textcircled{3}$

となる。

(1)
 $f(-1)=-4$
 $\Leftrightarrow 4-a+b-c+d=-4 \qquad \cdots \textcircled{4}$

となるから、 $\textcircled{1}\sim\textcircled{4}$ より

$(a,b,c,d)=(-1,-8,3,2)$

である。また、このとき、

$f'(x)=16x^3-3x^2-16x+3$
 $= (x+1)(x-1)(16x-3)$

であるから、関数 $y=f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	-1	...	$\frac{3}{16}$	...	1	...
$f'(x)$	－	0	+	0	－	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

したがって関数 $y=f(x)$ は確かに $x=-1$ で極値 -4 をとる。

(2)
 $\textcircled{1}\sim\textcircled{3}$ より、 b,c,d をそれぞれ a を用いて表すと、

$b=-8,c=-3a,d=2a+4$

となる。よって、

$f(x)=4x^4+ax^3-8x^2-3ax+2a+4$
 $= (x-1)^2\{4x^2+(a+8)x+2a+4\}$

となり、

$f'(x)=16x^3+3ax^2-16x-3a$
 $= (x+1)(x-1)(16x+3a)$

である。よって、 $f'(x)=0$ のとき $x=\pm 1,-\frac{3}{16}a$ である。 $f'(x)$ は三次式であるから、

$f'(x)=0$ の解の個数は3個以下である。よって、 $f(x)$ が極小値を2つもつとき、極大値を1つもつ。つまり $f'(x)=0$ が異なる3つの解を持てばよい。

[1] $-\frac{3}{16}a<-1\Leftrightarrow a>\frac{16}{3}$ のとき

$f(x)$ の増減は以下の通りとなる。

x	...	$-\frac{3}{16}a$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	－	0	+	0	－	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

したがって、2つの極小値が等しくなるとき、

$f\left(-\frac{3}{16}a\right)=f(1)$
 $\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{16}a-1\right)^2\left\{4\left(-\frac{3}{16}a\right)^2+(a+8)\cdot\left(-\frac{3}{16}a\right)+2a+4\right\}=0$
 $\Leftrightarrow 4\left(-\frac{3}{16}a\right)^2+(a+8)\cdot\left(-\frac{3}{16}a\right)+2a+4=0\left(\because -\frac{3}{16}a-1<0\right)$
 $\Leftrightarrow \frac{9}{64}a^2-\frac{3}{16}a^2-\frac{3}{2}a+2a+4=0$
 $\Leftrightarrow 3a^2-32a-256=0$
 $\Leftrightarrow (a-16)(3a+16)=0$
 $\Leftrightarrow a=16\left(\because a>\frac{16}{3}\right)$

となる。また、このとき極小値の値は、

$f\left(-\frac{3}{16}a\right)=f(1)=0$

である。

[2] $-1<-\frac{3}{16}a<1\Leftrightarrow -\frac{16}{3}<a<\frac{16}{3}$ のとき

$f(x)$ の増減は以下の通りとなる。

x	...	-1	...	$-\frac{3}{16}a$	...	1	...
$f'(x)$	－	0	+	0	－	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

したがって、2つの極小値が等しくなるとき、

$f(-1)=f(1)$
 $\Leftrightarrow 4(4-a-8+2a+4)=0$
 $\Leftrightarrow 4a=0$
 $\Leftrightarrow a=0$

となり、これは $-\frac{16}{3}<a<\frac{16}{3}$ を満たす。また、このとき極小値の値は、

$f(-1)=f(1)=0$

である。

[3] $1<-\frac{3}{16}a\Leftrightarrow a<-\frac{16}{3}$ のとき

$f(x)$ の増減は以下の通りとなる。

x	...	-1	...	1	...	$-\frac{3}{16}a$	...
$f'(x)$	－	0	+	0	－	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

したがって、2つの極小値が等しくなるとき、

$f(-1)=f\left(-\frac{3}{16}a\right)$
 $\Leftrightarrow 4a=4\left(-\frac{3}{16}a\right)^4+a\left(-\frac{3}{16}a\right)^3-8\left(-\frac{3}{16}a\right)^2-3a\left(-\frac{3}{16}a\right)+2a+4$
 $\Leftrightarrow 4\left(-\frac{3}{16}a\right)^4+a\left(-\frac{3}{16}a\right)^3-8\left(-\frac{3}{16}a\right)^2-3a\left(-\frac{3}{16}a\right)-2a+4=0$
 $\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{16}a+1\right)\left\{4\left(-\frac{3}{16}a\right)^3+(a-4)\left(-\frac{3}{16}a\right)^2-(a+4)\left(-\frac{3}{16}a\right)-2a+4\right\}=0$
 $\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{16}a+1\right)^2\left\{4\left(-\frac{3}{16}a\right)^2+(a-8)\left(-\frac{3}{16}a\right)-2a+4\right\}=0$
 $\Leftrightarrow 4\left(-\frac{3}{16}a\right)^2+(a-8)\left(-\frac{3}{16}a\right)-2a+4=0\left(\because -\frac{3}{16}a+1>0\right)$
 $\Leftrightarrow \frac{9}{64}a^2-\frac{3}{16}a^2+\frac{3}{2}a-2a+4=0$
 $\Leftrightarrow 3a^2+32a-256=0$
 $\Leftrightarrow (a+16)(3a-16)=0$
 $\Leftrightarrow a=-16\left(\because a<-\frac{16}{3}\right)$

となる。また、このとき極小値の値は、

$f(-1)=f\left(-\frac{3}{16}a\right)$
 $=4a$
 $=-64$

である。

以上、[1],[2],[3]より、関数 $y=f(x)$ が2つ極小値をもち、それらが等しいとき、

$(a,\text{極小値})=(0,0),(16,0),(-16,-64)$

となる。

[Ⅱ]

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	4	－	2	0			
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	－	1	2	1	2	1	2
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	1	－	1	2	1	2	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 e^{-x} \text{ より,} \\ f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} \\ &= xe^{-x} (2-x)\end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の $x \geq 0$ における増減は以下のようになる。

x	0	...	2	...
$f'(x)$		+	0	－
$f(x)$		↗	極大	↘

よって、関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ は $x = 2$ のとき最大値 $f(2) = 4e^{-2}$ をとる。よって、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}0 &< x^2 e^{-x} < 4e^{-2} \\ \Leftrightarrow 0 &< xe^{-x} < \frac{4e^{-2}}{x}\end{aligned}$$

となり、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{-2}}{x} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}I &= \int xe^{-x} \sin x dx \\ &= xe^{-x} (-\cos x) - \int (e^{-x} - xe^{-x}) (-\cos x) dx \\ &= -xe^{-x} \cos x + \int e^{-x} \cos x dx - \int xe^{-x} \cos x dx \\ &= -xe^{-x} \cos x + \int e^{-x} \cos x dx - \left\{ xe^{-x} \sin x - \int (e^{-x} - xe^{-x}) \sin x dx \right\} \\ &= -xe^{-x} \cos x - xe^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx + \int e^{-x} \sin x dx - \int xe^{-x} \sin x dx \\ &= -xe^{-x} \cos x - xe^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx + \int e^{-x} \sin x dx - I\end{aligned}$$

となるから、

$$I = \frac{1}{2} \left(-xe^{-x} \cos x - xe^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx + \int e^{-x} \sin x dx \right)$$

となる。また、 $\int e^{-x} \cos x dx + \int e^{-x} \sin x dx$ は積分定数 C_0 を考えて、

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \cos x dx + \int e^{-x} \sin x dx &= \int e^{-x} \cos x dx + e^{-x} (-\cos x) - \int (-e^{-x}) (-\cos x) dx \\ &= -e^{-x} \cos x + C_0\end{aligned}$$

であるから、 I は積分定数 C を用いて、

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \left(-xe^{-x} \cos x - xe^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + C_0 \right) \\ &= \frac{-1}{2} xe^{-x} \cos x - \frac{1}{2} xe^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x + C\end{aligned}$$

と表せる。

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned}I_n &= \int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} xe^{-x} \sin x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \left(xe^{-x} \cos x + xe^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \right) \right]_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ (2n-1)\pi e^{-(2n-1)\pi} (-1) + e^{-(2n-1)\pi} (-1) - 2(n-1)\pi e^{-2(n-2)\pi} - e^{-2(n-1)\pi} \right\} \\ &= n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2(n-1)\pi} - \frac{1}{2} \{ (\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1 \} e^{-2(n-1)\pi}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $a_n = n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2(n-1)\pi}$ 、 $b_n = \{ (\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1 \} e^{-2(n-1)\pi}$ とし、それぞれの第 n

項までの和をそれぞれ A_n 、 B_n とする。

$$\begin{aligned}A_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= (e^{-\pi} + 1)\pi e^0 + 2(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2\pi} + \cdots + (n-1)(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2(n-2)\pi} + n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2(n-1)\pi}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}e^{-2\pi} A_n &= e^{-2\pi} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \\ &= (e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2\pi} + 2(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-4\pi} + \cdots + (n-1)(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2(n-1)\pi} + n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2n\pi}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}A_n - e^{-2\pi} A_n &= (e^{-\pi} + 1)\pi e^0 + (e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2\pi} + \cdots + (e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2(n-2)\pi} \\ &\quad + (e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2(n-1)\pi} - n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2n\pi} \\ \Leftrightarrow (1 - e^{-2\pi}) A_n &= \frac{(e^{-\pi} + 1)\pi (1 - e^{-2n\pi})}{1 - e^{-2\pi}} - n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2n\pi} \\ \Leftrightarrow A_n &= \frac{(e^{-\pi} + 1)\pi (1 - e^{-2n\pi})}{(1 - e^{-2\pi})^2} - \frac{n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2n\pi}}{(1 - e^{-2\pi})} (\because 1 - e^{-2\pi} \neq 0)\end{aligned}$$

となる。よって、(1)より $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-2n\pi} = 0$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2n\pi}}{(1 - e^{-2\pi})} = 0$ である。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n\pi} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{(e^{-\pi} + 1)\pi}{(1 - e^{-2\pi})^2} \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(e^{-\pi} + 1)\pi e^{-2n\pi}}{(1 - e^{-2\pi})} = 0 \right)$$

である。また、 b_n は初項 $(\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1$ 、公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列であるから、

$$B_n = \frac{\{ (\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1 \} (1 - e^{-2n\pi})}{1 - e^{-2\pi}}$$

となる。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{(\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1}{1 - e^{-2\pi}}$$

である。 $I_n = a_n - \frac{1}{2} b_n$ であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} I_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A_n - \frac{1}{2} B_n \right) \\ &= \frac{(e^{-\pi} + 1)\pi}{(1 - e^{-2\pi})^2} - \frac{(\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1}{2(1 - e^{-2\pi})} \\ &= \frac{2(e^{-\pi} + 1)\pi - (1 - e^{2\pi}) \{ (\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1 \}}{2(1 + e^{-\pi})^2 (1 - e^{-\pi})^2} \\ &= \frac{2\pi - (1 - e^{-\pi}) \{ (\pi-1)e^{-\pi} + 2\pi-1 \}}{2(1 + e^{-\pi}) (1 - e^{-\pi})^2} \\ &= \frac{(1 + e^{-\pi}) (1 - e^{-\pi} + \pi e^{-\pi})}{2(1 + e^{-\pi}) (1 - e^{-\pi})^2} \\ &= \frac{1 + (-1 + \pi)e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})^2}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	
	6	
(2)	イ	ウ
	6	9
(3)	エ	オ
	4	2

【解説】

下記のようにマス目にアルファベットを置いて考える。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

(1)

2色の選び方は、 ${}_3C_2=3$ (通り)である。その2色のうち一方でAを塗ると、塗り方はA, C, E, G, Iに同じ色が入り、B, D, F, Hにもう一方の色が入る場合のみであるから、2色の塗り方を考慮して、

$$3\cdot 2=6(\text{通り})$$

となる。

(2)

3色のうちいずれかでEに塗り、他の2色を用いてB, D, F, Iを塗る場合で場合分けをする。

[1] B, D, F, Hを同じ色で塗るとき

塗り方は、使っていない色でA, C, G, Iに塗るとき、A, C, Gに塗るとき、A, Cに塗るとき、A, Iに塗るとき、Aに塗るときの5通りが考えられる。色の選び方が3!通りあるから、場合の数は、 $5\cdot 3!=30$ (通り)である。

[2] D, F, Hを同じ色で塗り、Bを残りの色で塗るとき

A, CはEと同じ色以外塗れないから、G, Iの塗り方を考えればよい。G, Iの2箇所を2色で塗る場合の数は、 $2\cdot 2=4$ (通り)であり、重複はない。色の選び方が3!通りあるから、場合の数は、 $4\cdot 3!=24$ (通り)である。

[3] B, Hを同じ色で塗り、D, Fを残りの色で塗るとき

A, C, G, IにはEと同じ色以外塗れないから、塗り方は1(通り)である。また色の選び方は重複を考慮して、3通りであるから、場合の数は、3通りである。

[4] B, Dを同じ色で塗り、F, Hを残りの色で塗るとき

C, GにはEと同じ色以外塗れないから、A, Iの塗り方を考えればよい。塗り方は重複を考慮して、Eと同じ色でAを塗るとき、Eと同じ色でA, Iを塗るとき、B, Dと同じ色でIを塗り、F, Hと同じ色でAを塗るときの3通りである。色の選び方は、Eと同じ色でAを塗るとき、Eと同じ色でA, Iを塗るときは3通り、B, Dと同じ色でIを塗り、F, Hと同じ色でAを塗るときは3!通りあるから、場合の数は $3\cdot 2+3!=12$ (通り)である。

以上、[1], [2], [3], [4]より、求める場合の数は、

$$30+24+3+12=69(\text{通り})$$

である。

(3)

上段を赤で塗るのは、両端を赤で塗るとき、左から1, 3番目を赤で塗るとき、左から2, 4番目を赤で塗るときのいずれかである。残りの2色を○, ×で表し、図を用いて考える。また、これらは回転、裏返してできないものとする。

[1] 両端を赤で塗るとき

○と×の色の選び方は2通りであり、塗り方は、赤色の位置を考えて、以下のようになる。

赤	○	×	赤
×	赤	○	×
赤	○	×	○

赤	○	×	赤
×	赤	○	×
○	×	赤	○

赤	○	×	赤
○	赤	○	×
×	○	×	赤

赤	○	×	赤
○	×	赤	×
赤	○	×	○

赤	○	×	赤
○	×	赤	○
×	赤	○	×

赤	○	×	赤
○	×	赤	○
×	赤	○	×

赤	○	×	赤
○	×	赤	○
×	赤	○	×

赤	○	×	赤
○	×	赤	×
赤	○	×	赤

よって、場合の数は $2\cdot 7=14$ (通り)である。

[2] 左から1, 3番目を赤で塗るとき

○と×の色の選び方は2通りであり、塗り方は、赤色の位置を考えて、以下のようになる。

赤	×	赤	×
○	赤	○	赤
×	○	×	○

赤	×	赤	○
×	赤	○	×
赤	○	×	○

赤	×	赤	○
×	赤	○	×
○	×	赤	○

赤	×	赤	○
○	赤	○	×
×	○	×	赤

赤	×	赤	○
×	○	×	赤
○	赤	○	×

赤	×	赤	○
○	赤	○	×
×	○	×	赤

赤	×	赤	○
×	○	×	赤
○	赤	○	×

赤	×	赤	×
×	○	×	○
○	赤	○	赤

よって、場合の数は $2\cdot 7=14$ (通り)である。

[3] 左から2, 4番目を赤で塗るとき

○と×の色の選び方は2通りであり、塗り方は、赤色の位置を考えて、以下のようになる。

×	赤	×	赤
赤	○	赤	○
○	×	○	×

×	赤	○	赤
赤	○	×	○
○	×	赤	×

×	赤	○	赤
赤	○	×	○
○	赤	○	×

○	赤	×	赤
×	○	赤	○
赤	×	○	×

○	赤	×	赤
×	○	赤	×
○	赤	×	○

○	赤	×	赤
×	○	赤	×
○	×	○	赤

○	赤	○	赤
×	○	×	○
赤	×	赤	×

よって、場合の数は $2\cdot 7=14$ (通り)である。

以上、[1], [2], [3]より求める場合の数は、

$$14+14+14=42(\text{通り})$$

である。