

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ		
	2	5	2		
(2)	エ	オ	カ		
	1	1	1		
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	2	1	2	1
(4)	シ				
	6				

【解説】

- (1) $f_2(x) = \sin x + 2 \sin 2x$ より,
- $$S_2 = \int_0^\pi (\sin x + 2 \sin 2x) dx = [-\cos x - \cos 2x]_0^\pi = 2$$
- である。 T_2 については、被積分関数を展開して各項を積分することで、

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^\pi (\sin x + 2 \sin 2x)^2 dx \\ &= \int_0^\pi \sin^2 x dx + \int_0^\pi 4 \sin 2x \sin x dx + \int_0^\pi 4 \sin^2 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx + 8 \cdot \int_0^\pi \sin^2 x \cos x dx + 2 \cdot \int_0^\pi (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi + 8 \cdot \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^\pi + 2 \cdot \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^\pi \\ &= \frac{5}{2} \pi \end{aligned}$$

を得る。

- (2) Σ と $\prod$ はいずれも和に関する演算子であり、交換可能であることに注意すると、

$$S_n = \int_0^\pi \sum_{k=1}^n k \sin kx dx = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi k \sin kx dx = \sum_{k=1}^n [-\cos kx]_0^\pi = \sum_{k=1}^n (1 - \cos k\pi)$$

となる。ここで、 $\cos k\pi$ は偶奇に応じて値が入れ替わり、 k が偶数のとき 1、 k が奇数のとき -1 をとる数列であることから、

$$\sum_{k=1}^n \cos k\pi = \begin{cases} -1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。したがって、 S_n の値は偶奇によってそれぞれ、

$$S_n = n - \sum_{k=1}^n \cos k\pi = \begin{cases} n+1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となる。

- (3) k, l を自然数とする。このとき、

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n k \sin kx \right)^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 \sin^2 kx \\ &\quad + 2 \{ 2 \sin x \sin 2x + 3 \sin x \sin 3x + \cdots + ij \sin ix \sin jx + \cdots + (n-1)n \sin (n-1)x \sin nx \} \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $1 \leq i < j \leq n$ である。したがって、和と積分を交換すると、

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n k \sin kx \right)^2 dx \\ &= \int_0^\pi \left[\sum_{k=1}^n k^2 \sin^2 kx + 2 \{ 2 \sin x \sin 2x + \cdots + ij \sin ix \sin jx + \cdots + (n-1)n \sin (n-1)x \sin nx \} \right] dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi k^2 \sin^2 kx dx \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \\ &\quad + 2 \int_0^\pi \{ 2 \sin x \sin 2x + \cdots + ij \sin ix \sin jx + \cdots + (n-1)n \sin (n-1)x \sin nx \} dx \end{aligned}$$

となる。 $k > 0$ であることに注意して①の第1項を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi k^2 \sin^2 kx dx &= \sum_{k=1}^n k^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{\pi}{12} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

となる。また、 $1 \leq i < j$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi ij \sin ix \sin jx dx &= -\frac{ij}{2} \int_0^\pi \{ \cos(i+j)x - \cos(i-j)x \} dx \\ &= -\frac{ij}{2} \left[\frac{\sin(i+j)x}{i+j} - \frac{\sin(i-j)x}{i-j} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、①の第2項は0となる。以上から、

$$T_n = \frac{\pi}{12} n(n+1)(2n+1)$$

と求まる。

- (4) n の偶奇で場合分けして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n}$ の値を計算すると、

[1] n が奇数のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n} = \frac{12}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{12}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{1 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\pi}$$

[2] n が偶数のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n} = \frac{12}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{12}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\pi}$$

以上、[1]、[2]より、 $\frac{S_n^3}{T_n}$ の極限值は偶奇によらず一致するため、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n}$ は存在して、その極限値は $\frac{6}{\pi}$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ								
	4	6	5								
(2)	エ	オ									
	2	1									
(3)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	
	1	8	9	1	0	2	3	4	0	5	
(4)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	
	6	0	0	8	0	9	3	6	8	0	

〔解説〕

- (1) どのような順序で並んでいたとしても、 $a_1, a_2, \cdots, a_{30}$ の総和は1から30までの数を足し合わせた値に等しいから、

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{30} k = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 = 465$$

である。

- (2) $0 < l < m$ かつ $0 < p_1 < p_2$ のとき、
 $(lp_1 + mp_2) - (lp_2 + mp_1) = p_2(m - l) - p_1(m - l) = (p_2 - p_1)(m - l) > 0$
 であるから、
 $lp_2 + mp_1 < lp_1 + mp_2$
 なる関係を満たす。

- (3) (2)の結果より、大きい数は大きい数とセットにするほど積和は大きく、大きい数と小さい数をセットにするほど積和は小さくなることが分かる。したがって、一般の実数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ について、

$$(0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n) \text{ かつ } (0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n)$$

を満たすとき、(2)で得られた大小関係を繰り返し用いると、

$$\text{積和の最大値：} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n, \text{ 積和の最小値：} x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1$$

となる。上記の関係に注意すると、 $\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最小となるのは $\{b_k\}$ が減少列のとき、すなわち

$$b_k = 61 - k \quad (k = 1, 2, \cdots, 30)$$

としたときである。一方で、 $\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最大となるのは $\{b_k\}$ が増加列のとき、すなわち

$$b_k = 30 + k \quad (k = 1, 2, \cdots, 30)$$

としたときである。よって、 $\sum_{k=1}^{30} kb_k$ の最小値は、

$$\sum_{k=1}^{30} k(61 - k) = 61 \cdot \sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} k^2 = 61 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 - \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 = 30 \cdot 31 \cdot 61 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 18910$$

であり、 $\sum_{k=1}^{30} kb_k$ の最大値は、

$$\sum_{k=1}^{30} k(30 + k) = 30 \cdot \sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=1}^{30} k^2 = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 + \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 = 5 \cdot 31 \cdot (90 + 61) = 23405$$

である。

- (4) (3)の結果を踏まえると、 $\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小となるのは $\{a_k\}$ が減少列のとき、すなわち
 $a_k = 31 - k \quad (k = 1, 2, \cdots, 30)$
 のときである。したがって、 $\sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k$ の最小値および最大値を求めればよい。ここで、数列 $\{k(31 - k)\}$ の項を書き下すと、

$$1 \cdot 30, 2 \cdot 29, \cdots, 15 \cdot 16, 16 \cdot 15, \cdots, 29 \cdot 2, 30 \cdot 1$$

より、 $\{k(31 - k)\}$ は $1 \leq k \leq 15$ の範囲で増加列であり、 $16 \leq k \leq 30$ の範囲ではその増加列の

項の順序を逆転させた減少列となっていることがわかる。よって、 $\sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k$ が最小となるのは、数列 $\{c_k\}$ の両端から順に大きい数を割り当てたとき、すなわち

$$(c_k, c_{31-k}) = (32 - 2k, 31 - 2k) \quad (k = 1, 2, \cdots, 15)$$

としたときである。一方で、 $\sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k$ が最大となるのは、数列 $\{c_k\}$ の両端から順に小さい数を割り当てたとき、すなわち

$$(c_k, c_{31-k}) = (2k - 1, 2k) \quad (k = 1, 2, \cdots, 15)$$

としたときである。このことに注意して、まず、 $\sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k$ を前半部分と後半部分に分けると、

$$\sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k = \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)c_k + \sum_{k=16}^{30} k(31 - k)c_k$$

であり、さらに、数列の両端から足し合わせるために、右辺第2項について $k = 31 - j$ として、足し合わせる順番を変更すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k &= \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)c_k + \sum_{k=16}^{30} k(31 - k)c_k \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)c_k + \sum_{j=1}^{15} j(31 - j)c_{31-j} \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)(c_k + c_{31-k}) \end{aligned}$$

となる。以上より、 $\sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k$ の最小値は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k &= \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)(c_k + c_{31-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)(63 - 4k) \\ &= 4 \cdot \sum_{k=1}^{15} k^3 - 187 \cdot \sum_{k=1}^{15} k^2 + 1953 \cdot \sum_{k=1}^{15} k \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \right)^2 - 187 \cdot \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 + 1953 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \\ &= 57600 - 231880 + 234360 \\ &= 60080 \end{aligned}$$

であり、 $\sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k$ の最大値は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} k(31 - k)c_k &= \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)(c_k + c_{31-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31 - k)(4k - 1) \\ &= -4 \cdot \sum_{k=1}^{15} k^3 + 125 \cdot \sum_{k=1}^{15} k^2 - 31 \cdot \sum_{k=1}^{15} k \\ &= -4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \right)^2 + 125 \cdot \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 - 31 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \\ &= -57600 + 155000 - 3720 \\ &= 93680 \end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ				
	－	1	8				
(2)	エ	オ	カ	キ			
	2	4	1	2			
(3)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	7	1	2	1	1	1	2
(4)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
	4	1	1	2	2	2	7

【解説】

(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ の両辺を 2 乗すると,}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$$

が得られる。

(2)

$$t = \sin \theta + \cos \theta \text{ とおくと, (1) と同様の議論により,}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = t^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = t^2$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

を得る。2 倍角および 3 倍角の公式から、 $f(\theta)$ を $\sin \theta + \cos \theta$ と $\sin \theta \cos \theta$ で表すと、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) - (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2 \\ &= -4(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta + 5(\sin \theta + \cos \theta) - 2 \\ &= -4(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta + 5(\sin \theta + \cos \theta) - 2 \\ &= -4(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta + 5(\sin \theta + \cos \theta) - 2 \end{aligned}$$

であり、 $\sin \theta + \cos \theta = t$ 、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$ を代入して、 $f(\theta)$ を t の関数に置き換えると、

$$f(\theta) = -4t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right) - 8 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} + 5t - 2 = 2t^3 - 4t^2 - t + 2$$

となる。

(3)

$g(t) = 2t^3 - 4t^2 - t + 2$ とおく。このとき $g(2) = 0$ であるから、因数定理より、 $g(t)$ は $(t - 2)$ を因数にもつことがわかり、 $g(t) = (t - 2)(2t^2 - 1)$ と因数分解できる。さらに、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、

$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ の値域は $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ であることから、 $f(\theta) = g(t) = 0$ を満たすのは、

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

のときである。これより、 $\sin 2\theta = -\frac{1}{2}$ であり、 $0 \leq 2\theta \leq 2\pi$ の範囲で与式を解けば、

$$2\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

が $f(\theta) = 0$ の解であると求まる。

(4)

$0 \leq \theta \leq \pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めることは、 $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における $g(t)$ の最大値を求めることと同値であるから、 $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ の範囲で $g(t)$ の増減を考える。

$$g'(t) = 6t^2 - 8t - 1$$

より、 $g'(t)$ は t 軸と $t = \frac{4 \pm \sqrt{22}}{6}$ で交わる下に凸な放物線であるから、 $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ の範囲で $g(t)$ の増減表を書くと、次のようになる。

t	-1	...	$\frac{4 - \sqrt{22}}{6}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		↗	極大	↘	

したがって、 $g(t)$ の最大値を与える t を t_0 とおくと、 $t_0 = \frac{4 - \sqrt{22}}{6}$ であり、求める最大値は $g(t_0)$ となる。ここで、 $g'(t_0) = 0$ であることに注意して、 $g(t)$ を $g'(t)$ で割ると、

$$g(t) = \left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{9} \right) g'(t) - \frac{22}{9}t + \frac{16}{9}$$

となり、与式に $t = t_0$ を代入することで、 $g(t_0) = -\frac{22}{9}t_0 + \frac{16}{9}$ を得る。よって、 $f(\theta)$ の最大値

は、 $g(t_0) = -\frac{22}{9} \cdot \frac{4 - \sqrt{22}}{6} + \frac{16}{9} = \frac{4 + 11\sqrt{22}}{27}$ である。