

【1】

【解答】

(1)	(1-1)	ア	イ				
		1	3				
	(1-2)	ウ	エ	オ	カ		
		－	8	－	4		
	(1-3)	キ	ク	ケ	コ		
		4	8	3	5		
(2)	(2-1)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
		－	8	5	1	8	5
	(2-2)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
		1	2	9	5	2	2

【解説】

(1)(1-1)

曲線 C と接線 ℓ の接点が $(p, f(p))$ であるから、 $f(x) = x^4 - 4x^3$, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ より接線 ℓ

の方程式は

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \\ \Leftrightarrow y = 4p^2(p-3)x - 3p^4 + 8p^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。曲線 C と接線 ℓ の式を連立すると

$$4p^2(p-3)x - 3p^4 + 8p^3 = x^4 - 4x^3 \\ \Leftrightarrow (x-p)^2 \{x^2 + 2(p-2)x + 3p^2 - 8p\} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、曲線 C と接線 ℓ の共有点が全て接点であるとき、 x の2次方程式

$x^2 + 2(p-2)x + 3p^2 - 8p = 0$ は重解をもつ、または実数解をもたない。よって判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow (p-2)^2 - (3p^2 - 8p) \leq 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - 2p - 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow p \leq 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \leq p$$

となる。ここで問題文の条件より $p > 0$ であるから、 p が取りうる値の範囲は $1 + \sqrt{3} \leq p$ である。

(1-2)

$p = 1 + \sqrt{3}$ は x の2次方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の解であるから、 $p^2 - 2p - 2 = 0$ である。よって

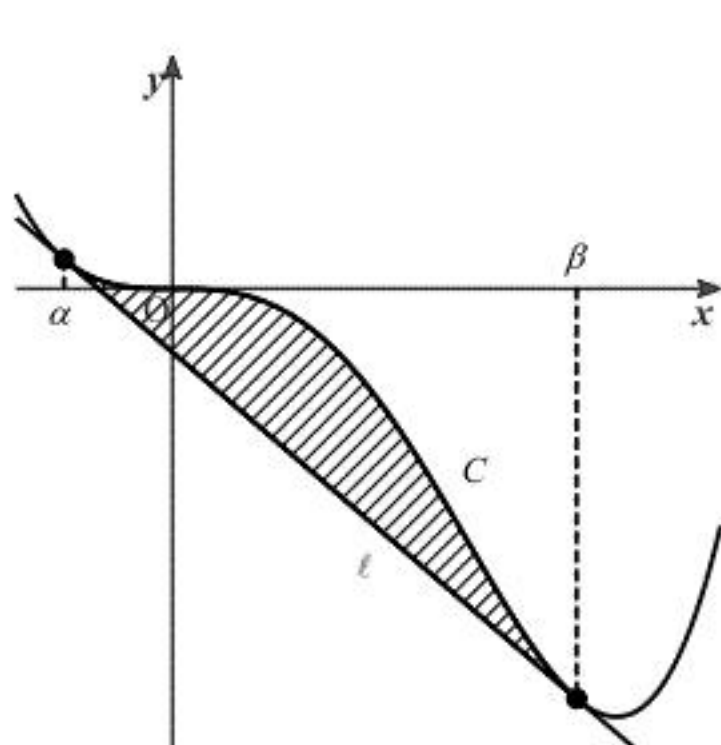
$p = 1 + \sqrt{3}$ のとき、接線 ℓ の方程式は

$$y = 4p^2(p-3)x - 3p^4 + 8p^3 \\ \Leftrightarrow y = p^2 \{4(p-3)x - p(3p-8)\} \\ \Leftrightarrow y = (4+2\sqrt{3}) \{4(-2+\sqrt{3})x - (1+\sqrt{3})(-5+3\sqrt{3})\} \\ \Leftrightarrow y = -8x - 4$$

となる。よって $p = 1 + \sqrt{3}$ のとき、 $a = -8, b = -4$ である。

(1-3)

$p = 1 + \sqrt{3}$ のときの曲線 C と接線 ℓ の位置関係は下図のようになり、求める面積は下図の斜線部分となる。



$p = 1 + \sqrt{3}$ のとき、②式は

$$(x-p)^2 \{x^2 + 2(p-2)x + 3p^2 - 8p\} = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1-\sqrt{3})^2 (x-1+\sqrt{3})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

となるから、接点の x 座標は $x = 1 \pm \sqrt{3}$ である。ここで $\alpha = 1 - \sqrt{3}, \beta = 1 + \sqrt{3}$ とおくと、

$\beta - \alpha = 2\sqrt{3}$ である。よって求める面積を T とすると

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} \{(x^4 - 4x^3) - (-8x - 4)\} dx \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 dx \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 \{(x-\alpha) - (\beta-\alpha)\}^2 dx \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \{(x-\alpha)^4 - 2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3 + (\beta-\alpha)^2 (x-\alpha)^2\} dx \\ = \left[\frac{(x-\alpha)^5}{5} - \frac{\beta-\alpha}{2} (x-\alpha)^4 + \frac{(\beta-\alpha)^2}{3} (x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ = \frac{1}{30} (\beta-\alpha)^5 \\ = \frac{48\sqrt{3}}{5}$$

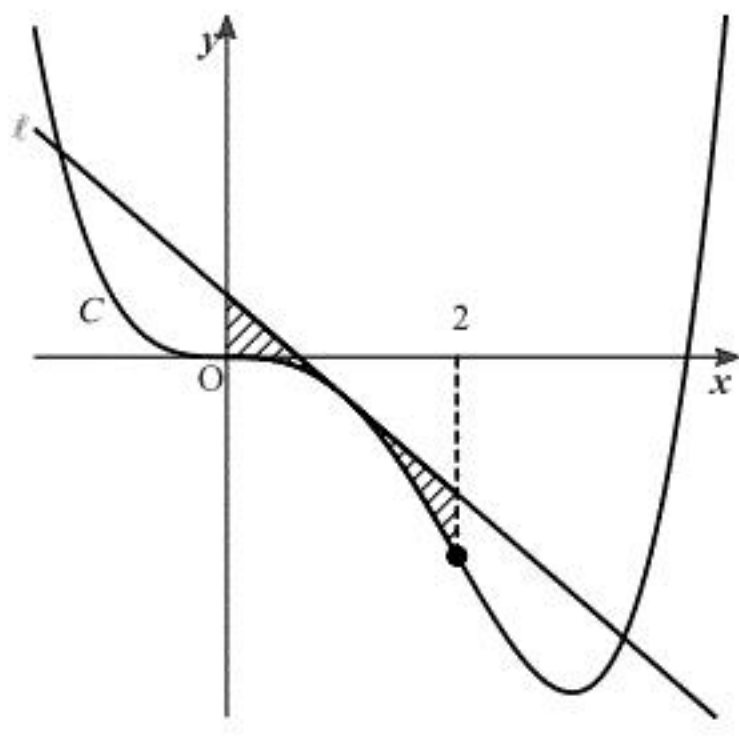
となる。よって $p = 1 + \sqrt{3}$ のとき、接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積は $\frac{48\sqrt{3}}{5}$ である。

(2)(2-1)

$p = 1$ のとき、①式より、

$$y = 4(1-3)x - 3 + 8 \\ \Leftrightarrow y = -8x + 5$$

となるから接線 ℓ の方程式は $y = -8x + 5$ となる。このとき、求める面積 S は下図斜線部分の面積である。



よって

$$S = \int_0^2 \{(-8x+5) - (x^4 - 4x^3)\} dx \\ = \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - 4x^2 + 5x \right]_0^2 \\ = \frac{18}{5}$$

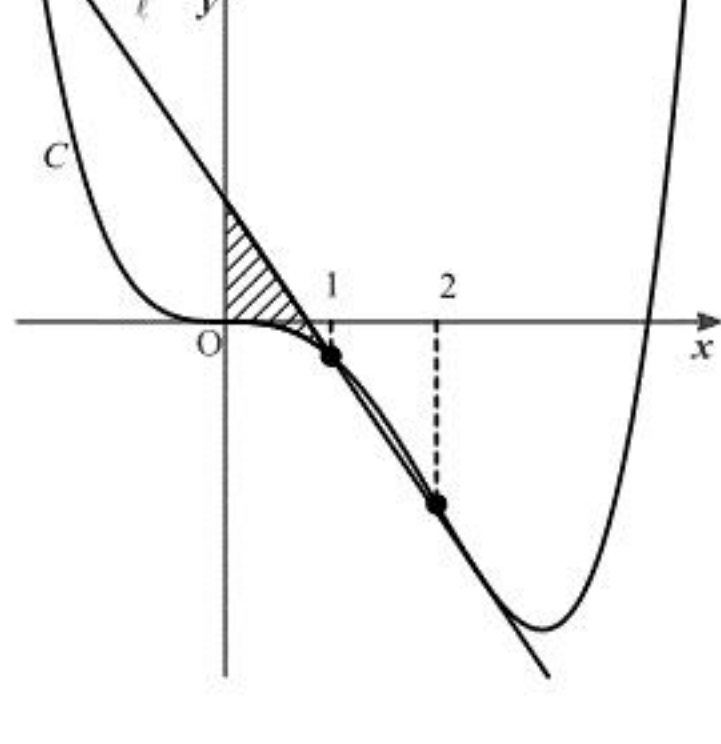
となる。よって $p = 1$ のとき、 $a = -8, b = 5, S = \frac{18}{5}$ となる。

(2-2)

接線 ℓ が点 $(1, -3)$ を通り、かつ $p \neq 1$ であるとき、①式から

$$-3 = 4p^2(p-3) - 3p^4 + 8p^3 \\ \Leftrightarrow p^4 - 4p^3 + 4p^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (p-1)^2 (p^2 - 2p - 1) = 0 \\ \therefore p = 1 + \sqrt{2} (\because p > 0, p \neq 1)$$

となる。このとき、求める面積 S は下図斜線部分の面積である。



また、①式から $p = 1 + \sqrt{2}$ のときの接線 ℓ の方程式は

$$y = 4(1+\sqrt{2})^2 (-2-\sqrt{2})x - 3(1+\sqrt{2})^4 + 8(1+\sqrt{2})^3 \\ \Leftrightarrow y = -4(2+\sqrt{2})x + 5 + 4\sqrt{2}$$

となるから、求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \{-4(2+\sqrt{2})x + 5 + 4\sqrt{2}\} - (x^4 - 4x^3) dx \\ = \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - 2(2+\sqrt{2})x^2 + (5+4\sqrt{2})x \right]_0^1 \\ = \frac{9}{5} + 2\sqrt{2}$$

である。

【Ⅱ】

〔解答〕

(1)	ア					
	5					
(2)	イ	ウ	エ	オ		
	－	1	－	1		
(3)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	5	4	1	5	4
(4)	シ	ス	セ			
	5	5	2			
(5)	ソ	タ	チ	ツ		
	5	5	3	2		

〔解説〕

(1)

4点 P_0, P_1, P_2, P_3 は原点を中心とする円周上に存在するから、 k を整数として

$$\begin{aligned}\angle P_0OP_1 + \angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \angle P_3OP_0 &= 2k\pi \\ \Leftrightarrow \theta + 2\theta + 3\theta + 4\theta &= 2k\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{k}{5}\pi\end{aligned}$$

と表せる。ここで $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $k=1, 2$ であるが、 $k=2$ のとき、 P_1, P_3 が一致することから

不適である。よって $\theta = \frac{\pi}{5}$ である。

(2)

(1)より $\theta = \frac{\pi}{5}$ であるから、ド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}z^5 &= \cos \pi + i \sin \pi \\ &= -1\end{aligned}$$

である。ここで、 $w = z + \frac{1}{z}$ であるから

$$\begin{aligned}z^5 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 &= 0 (\because z \neq -1) \\ \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 &= 0 (\because z \neq 0) \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow w^2 - w - 1 &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。よって $w^2 + aw + b = 0$ をみたす a, b の値は $a = -1, b = -1$ である。

(3)

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ より、

$$\begin{aligned}w &= z + \frac{1}{z} \\ &= z + \bar{z} \\ &= 2 \cos \theta\end{aligned}$$

で、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta > 0$ であるから $w > 0$ である。ここで、 w は2次方程式 $w^2 - w - 1 = 0$

の解であるから $w > 0$ より $w = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。よって、 $\cos \theta = \frac{w}{2}$ より $\cos \theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ である。

また、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ &= \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \left(4 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{8} - 3 \right) \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

より、 $\cos 3\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ である。

(4)

$\triangle P_1OP_2$ は $OP_1 = OP_2 = 1, \angle P_1OP_2 = 2\theta$ の二等辺三角形であるから、余弦定理から

$$\begin{aligned}L^2 &= 1+1-2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow L^2 &= 2-2(2 \cos^2 \theta - 1) \\ \Leftrightarrow L^2 &= 4-4 \cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow L^2 &= \frac{5-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

である。

(5)

$\triangle P_2OP_3$ は $OP_2 = OP_3 = 1, \angle P_2OP_3 = 3\theta$ の二等辺三角形であるから、 $\triangle P_2OP_3$ の面積 S は

$S = \frac{1}{2} \sin 3\theta$ と表される。(2)より $\cos 3\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}S^2 &= \frac{1}{4} \sin^2 3\theta \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 3\theta) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8} \right) \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{32}\end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	3	1	2	1	2	0
(2)	キ	ク	ケ			
	3	2	6			
(3)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	9	3	1	2	1	1

【解説】

(1)

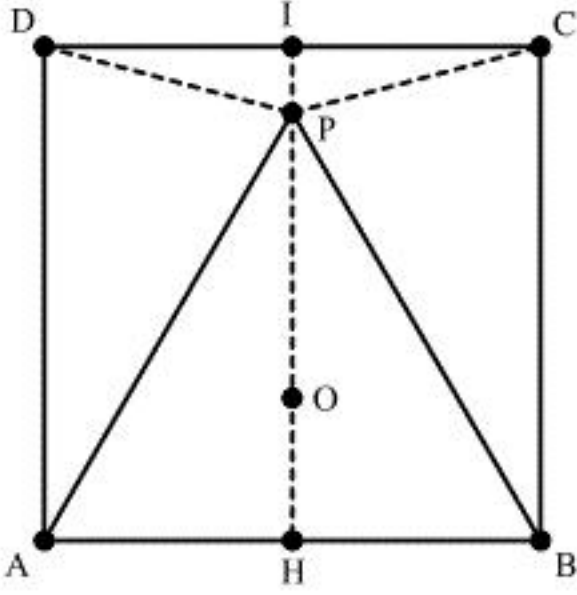
点 P は $\angle APB = 60^\circ$ を満たしながら動くから、円周角の定理の逆から、3 点 P, A, B を通る円は常に同一である。また、原点 O と P の距離は一定であることから、3 点 P, A, B を通る円の中心は O であることが分かる。よって $\triangle APB$ において正弦定理より

$$\begin{aligned} 2OP &= \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \\ \Leftrightarrow OP &= 2 \end{aligned}$$

となる。また、円周角の定理から $\angle AOB = 120^\circ$ である。原点から辺 AB に下ろした垂線の足を H とすると、 $AH = \sqrt{3}$, $\angle AOH = 60^\circ$ であるから $OH = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1$ となる。よって点 A の座標は $(-\sqrt{3}, -1)$ である。

(2)

四角形 ABCD が正方形であることから、 $PC = PD$ となるときの点 P は辺 AB の垂直二等分線上にあり、このとき $\triangle APB$ は正三角形である。図は以下のようになる。



P から CD に下ろした垂線の足を I とすると、 $PH = OP + OH = 3$, $AD = AB = 2\sqrt{3}$ より $PI = 2\sqrt{3} - 3$, $ID = \sqrt{3}$ となる。よって $\triangle PID$ において三平方の定理から

$$\begin{aligned} PD &= \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)^2 + 3} \\ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \\ &= 3\sqrt{2} - \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。よって $PC = PD = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ である。

(3)

点 P は原点を中心とする半径 2 の円周上のうち、直線 l より上側の領域にあるから、 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta) \left(-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{7}{6}\pi \right)$ とおける。ここで、 $\frac{PD}{PC}$ の値が最小となる場合を考えるから、

点 P は $PD < PC$ となる位置にある。よって $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi$ としてよい。このとき、

$$\begin{aligned} PC^2 &= (2\cos\theta - \sqrt{3})^2 + (2\sin\theta - 2\sqrt{3} + 1)^2 \\ PD^2 &= (2\cos\theta + \sqrt{3})^2 + (2\sin\theta - 2\sqrt{3} + 1)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{PD^2}{PC^2} &= \frac{(2\cos\theta + \sqrt{3})^2 + (2\sin\theta - 2\sqrt{3} + 1)^2}{(2\cos\theta - \sqrt{3})^2 + (2\sin\theta - 2\sqrt{3} + 1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}\cos\theta + (1 - 2\sqrt{3})\sin\theta + 5 - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}\cos\theta + (1 - 2\sqrt{3})\sin\theta + 5 - \sqrt{3}} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3}\cos\theta}{-\sqrt{3}\cos\theta + (1 - 2\sqrt{3})\sin\theta + 5 - \sqrt{3}} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})\tan\theta + \frac{5 - \sqrt{3}}{\cos\theta}} \quad (\because \cos\theta \neq 0) \end{aligned}$$

である。ここで $f(\theta) = (1 - 2\sqrt{3})\tan\theta + \frac{5 - \sqrt{3}}{\cos\theta}$ とおく。 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi$ より

$\cos\theta < 0$, $-\frac{1}{2} < \sin\theta < 1$ であるから

$$f(\theta) = \frac{(1 - 2\sqrt{3})\sin\theta + 5 - \sqrt{3}}{\cos\theta} < \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3}}{\cos\theta} < \frac{9}{2\cos\theta} < 0$$

である。よって $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi$ において常に $-\sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})\tan\theta + \frac{5 - \sqrt{3}}{\cos\theta} < 0$ であるから、 $f(\theta)$

の値が最大となるとき $\frac{PD}{PC}$ の値が最小となる。

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{1 - 2\sqrt{3}}{\cos^2\theta} + \frac{(5 - \sqrt{3})\sin\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{(5 - \sqrt{3})\sin\theta + 1 - 2\sqrt{3}}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

であるから、 $-\frac{1}{2} < \sin\theta < 1$ より、 $\sin\theta = \frac{2\sqrt{3} - 1}{5 - \sqrt{3}} (> 0)$ となる $\theta = \alpha \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$ をとれる。このとき $f(\theta)$ の増減は以下のようになる。

θ	$\frac{\pi}{2}$	...	α	...	$\frac{7}{6}\pi$
$f'(\theta)$	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
$f(\theta)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$\searrow$

よって $\theta = \alpha$ のとき $f(\theta)$ は最大値をとり、このときの点 P が点 P_1 となる。点 P_1 の y 座標は

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha &= \frac{4\sqrt{3} - 2}{5 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{9\sqrt{3} + 1}{11} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} P_1P_1' &= \frac{9\sqrt{3} + 1}{11} + 1 \\ &= \frac{9\sqrt{3} + 12}{11} \end{aligned}$$

である。