

【 I 】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	2	3	3	5	2	7	4
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ		
	－	2	－	2	9		

【解説】

(1)(1-1)

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{ より}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f''(x)=6x+2a$$

である。ここで、条件(ii)より r は 3 次曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標であり、3 次曲線は変曲点に関して点対称であるから

$$\begin{cases} f''(r)=0 & \cdots \textcircled{1} \\ \frac{p+q}{2}=r & \cdots \textcircled{2} \\ \frac{f(p)+f(q)}{2}=f(r) & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。よって、①、②より

$$f''\left(\frac{p+q}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{p+q}{2} + 2a = 0$$

$$\therefore q = -\frac{2a+3p}{3}$$

である。また、条件(i)、(ii)および③より、極大値 $f(q)$ は

$$\frac{f(p)+f(q)}{2}=f(r)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+f(q)}{2}=3$$

$$\therefore f(q)=5$$

である。

(1-2)

$f(x)$ は $x=p$ で極小値 1 をとるから、 $y=f(x)$ と直線 $y=1$ は $x=p$ で接する。ここで、 $y=f(x)$ と直線 $y=1$ の共有点のうち、 $(p, 1)$ 以外の点の x 座標を α とすると、方程式 $f(x)-1=0$ は α, p (重解) を解にもつ。よって、

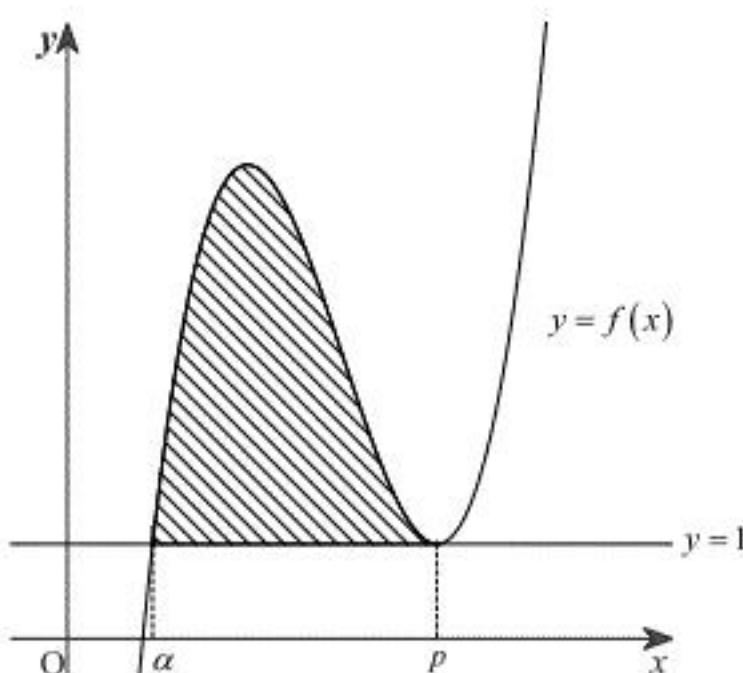
$$f(x)-1=(x-\alpha)(x-p)^2$$

が成り立ち、解と係数の関係および(1-1)より

$$a=-\alpha-2p$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{p+3q}{2}$$

となる。また、 $y=f(x)$ と直線 $y=1$ とで囲まれた図形を図示すると下図の斜線部分のようになる。



以上より、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^p \{f(x)-1\} dx \\ &= \int_{\alpha}^p (x-\alpha)(x-p)^2 dx \\ &= \int_{\alpha}^p \{(x-p)+(p-\alpha)\}(x-p)^2 dx \\ &= \int_{\alpha}^p \left\{ (x-p)^3 + (p-\alpha)(x-p)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-p)^4 + \frac{1}{3}(p-\alpha)(x-p)^3 \right]_{\alpha}^p \\ &= \frac{1}{12}(p-\alpha)^4 \\ &= \frac{27}{64}(p-q)^4 \end{aligned}$$

となる。ここで、条件(i)より $f'(p)=f'(q)=0$ ($p \neq q$) であり、2 次関数 $f'(x)$ の最高次の係数は 3 であるから、 $f'(x)=3(x-p)(x-q)$ と因数分解できる。よって、条件(i)と(1-1)の結果より

$$\begin{aligned} \int_q^p f'(x) dx &= f(p)-f(q) \\ \Leftrightarrow \int_q^p 3(x-p)(x-q) dx &= -4 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(p-q)^3 &= -\frac{4}{3} \\ \therefore p-q &= 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積は

$$S = \frac{27}{64} \cdot 2^4 = \frac{27}{4}$$

である。

(2)(2-1)

ℓ は 2 点 $(p, 1), (q, 5)$ を通り、(1-2)より $p-q=2$ であるから、その傾きは

$$\frac{1-5}{p-q} = \frac{-4}{2} = -2$$

である。

(2-2)

(2-1)の結果より ℓ は点 $(p, 1)$ を通る傾き -2 の直線であるから、その方程式は

$$y = -2(x-p)+1$$

$$\Leftrightarrow y = -2x+2p+1$$

である。よって、 ℓ が点 $(3, -9)$ を通るとき

$$-9 = -6+2p+1$$

$$\Leftrightarrow p = -2$$

であり、 $p-q=2, a = -\frac{3}{2}(p+q)$ より

$$a = -3(p-1) = 9$$

である。

【Ⅱ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	1	1	5	0	3	9	5	0
(2)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	
	5	0	7	5	0	0	0	
(3)	タ	チ						
	2	9						
(4)	ツ	テ	ト	ナ				
	1	0	2	1				

【解説】

(1)

袋の中から1個球を取り出すとき、その球が赤球、青球、黄球、白球である事象をそれぞれ R, B, Y, W とする。取り出した球を袋に戻すとき、 R, B, Y, W が起こる確率はそれぞれ

$\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ である。試行を2回行った後、点Pが元の原点Oの位置にあるのは「 R, Y が1

回ずつ起こるとき」または「 B, W が1回ずつ起こるとき」であるから、その確率は

$${}_2C_1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + {}_2C_1 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{11}{50}$$

である。また、試行を2回行った後、 $0 < OP \leq 1$ となる確率は0である。したがって、試行を2回行った後、 $OP > 1$ となる確率は

$$1 - \frac{11}{50} = \frac{39}{50}$$

である。

(2)

試行を4回行った後、点Pが元の原点Oの位置にあるのは「 R, Y が2回ずつ起こるとき」または「 B, W が2回ずつ起こるとき」または「 R, B, Y, W が1回ずつ起こるとき」であるから、その確率は

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + {}_4C_2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 4! \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{507}{5000}$$

である。

(3)

袋の中から1個ずつ元に戻さずに球を取り出すとき、取り出された赤球、青球、黄球、白球の個数をそれぞれ r, b, y, w とすると、 $0 \leq r \leq 4, 0 \leq b \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq w \leq 1$ であり、点Pの座標は $(r-y, b-w)$ と表せる。よって、袋の中から5個の球を取り出すとき、点Pが y 軸上にあるのは

$$\begin{cases} r-y=0 \\ r+b+y+w=5 \end{cases} \\ \therefore (r, b, y, w) = (1, 2, 1, 1), (1, 3, 1, 0), (2, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 0)$$

のときである。したがって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_5} + \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_0C_0}{{}_{10}C_5} + \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_0 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_5} + \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_0}{{}_{10}C_5} = \frac{2}{9}$$

である。

(4)

袋の中から6個の球を取り出すとき、直線 $y=x$ 上に点Pがあるのは

$$\begin{cases} r-y=b-w \\ r+b+y+w=6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r+w=3 \\ b+y=3 \end{cases} \\ \therefore (r, b, y, w) = (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 3, 0, 1), (3, 1, 2, 0), (3, 2, 1, 0), (3, 3, 0, 0)$$

のときである。したがって、求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_6} + \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_6} + \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot {}_2C_0 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_6} \\ & + \frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_0}{{}_{10}C_6} + \frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_0}{{}_{10}C_6} + \frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot {}_2C_0 \cdot {}_1C_0}{{}_{10}C_6} \\ & = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ								
	1	5	8	3	2								
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ								
	9	8	0	0	0								
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	
	1	5	3	2	3	3	8	1	5	1	6	0	

【解説】

(1)

与えられた極方程式より

$$\begin{aligned} r &= \frac{3}{5-3\cos\theta} \\ \Leftrightarrow (5-3\cos\theta)r &= 3 \quad (\because 5-3\cos\theta \neq 0) \\ \Leftrightarrow 5r &= 3(x+1) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $r > 0$ より、 $x+1 > 0$ のとき

$$\begin{aligned} 25r^2 &= 9(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow 25(x^2+y^2) &= 9(x^2+2x+1) \\ \Leftrightarrow 16\left(x-\frac{9}{16}\right)^2 + 25y^2 &= \frac{225}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{9}{16}\right)^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} &= 1 \end{aligned}$$

となる。このとき、この楕円上の点 (x, y) は $x+1 > 0$ を満たしている。したがって、

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{9}{16}\right)^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

であるから、楕円 $f(x, y) = 0$ の長軸の長さは $\frac{15}{8}$ 、短軸の長さは $\frac{3}{2}$ である。

(2)

楕円 $f(x, y) = 0$ を x 軸方向に $-\frac{9}{16}$ だけ平行移動した図形が楕円 $g(x, y) = 0$ であるから、

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

である。よって、楕円 $g(x, y) = 0$ の焦点の x 座標は

$$\pm \sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \pm \frac{9}{16}$$

である。したがって、 $g(x, y) = 0$ の焦点は $\left(\frac{9}{16}, 0\right), \left(-\frac{9}{16}, 0\right)$ より、 $f(x, y) = 0$ の焦点は

$\left(\frac{9}{8}, 0\right)$ と $(0, 0)$ である。

(3)

楕円 $g(x, y) = 0$ と直線 $16\sqrt{3}x + 20y - 15\sqrt{3} = 0$ の共有点の座標を $\left(\frac{15}{16}X, \frac{3}{4}Y\right)$ とおくと、(2)より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} g\left(\frac{15}{16}X, \frac{3}{4}Y\right) = 0 \\ 16\sqrt{3} \cdot \frac{15}{16}X + 20 \cdot \frac{3}{4}Y - 15\sqrt{3} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ 15\sqrt{3}X + 15Y - 15\sqrt{3} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 3(X-1)^2 = 1 \\ Y = -\sqrt{3}(X-1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4X^2 - 6X + 2 = 0 \\ Y = -\sqrt{3}(X-1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2X-1)(X-1) = 0 \\ Y = -\sqrt{3}(X-1) \end{cases} \\ &\therefore (X, Y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1, 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、求める2つの共有点の座標は $\left(\frac{15}{32}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ および $\left(\frac{15}{16}, 0\right)$ である。