

1

$$\begin{aligned} x^2 + (1-a^2)x + a^2 - 2a^2 + a \\ = x^2 + (1-a^2)x + (1-a)(a-a^2) \\ = \{x + (1-a)\} \{x + (a-a^2)\} \leq 0 \\ a^2 - a - (a-1) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore A: a-1 \leq x \leq a^2 - a \quad \text{----- ①}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (2a-7)x + a^2 - 7a + 10 \\ = x^2 + (2a-7)x + (a-2)(a-5) \\ = \{x + (a-2)\} \{x + (a-5)\} < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore B: 2-a < x < 5-a \quad \text{----- ②}$$

①, ② が数直線上で共通部分をもたないのは,

$$a^2 - a \leq 2 - a \iff a^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

または

$$5 - a \leq a - 1 \iff a \geq 3$$

よって、これらの補集合をとると、求める条件は

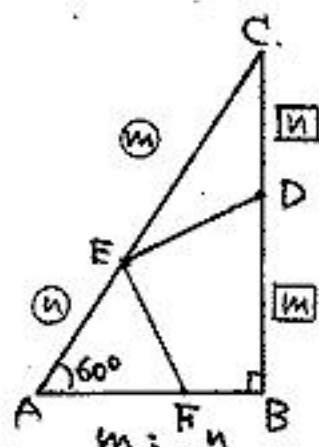
$$\underline{a < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < a < 3}$$

2

$$(1) AB=1, AC=2, \angle A=60^\circ$$

は右図の直角三角形であり、
 $BA = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{c}$ と略記すれば、

$$\begin{cases} \vec{BD} = \frac{m}{m+n} \vec{c}, \\ \vec{BE} = \frac{m}{m+n} \vec{a} + \frac{n}{m+n} \vec{c}, \\ \vec{BF} = \frac{n}{m+n} \vec{a} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{DE} = \frac{m}{m+n} \vec{a} + \frac{n-m}{m+n} \vec{c}, \\ \vec{EF} = \frac{n-m}{m+n} \vec{a} - \frac{n}{m+n} \vec{c} \end{cases} \text{ であり、} \vec{a} \perp \vec{c} \text{ である}$$

$$\begin{aligned} \vec{DE} \cdot \vec{EF} &= \frac{m(n-m)}{(m+n)^2} \cdot |\vec{a}|^2 - \frac{n(n-m)}{(m+n)^2} \times |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{m(n-m) - 3n(n-m)}{(m+n)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$(|\vec{a}|=1, |\vec{c}|=\sqrt{3})$$

$$\iff (m-3n)(n-m) = 0$$

$$\iff m=n \text{ or } m=3n$$

よって、

$$\underline{m:n=1:1 \text{ or } m:n=3:1}$$

$$(2) \vec{AD} = \frac{m}{m+n} \vec{c} - \vec{a} \text{ であり、}$$

$$\begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{EF} &= \frac{m-n}{m+n} |\vec{a}|^2 - \frac{mn}{(m+n)^2} |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{(m-n)(m+n) - 3mn}{(m+n)^2} \\ &= \frac{m^2 - 3mn - n^2}{(m+n)^2} \end{aligned}$$

$$m^2 - 3mn - n^2 = 0 = n^2 \left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^2 - 3 \frac{m}{n} - 1 \right\} = 0$$

$$\text{とすれば、} x^2 - 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

よって、これは有理数ではない。

よって、自然数 m, n が存在するとは

$\frac{m}{n}$ は有理数である。 $m^2 - 3mn - n^2 = 0$ であり、

自然数 m, n は存在せず、題意は示された。

3

A での待ち時間、

A と B への乗車時間、

B での待ち時間、

B と C への乗車時間、

の順序を考慮して

右の樹形図と表す。

(2通り) の順序を

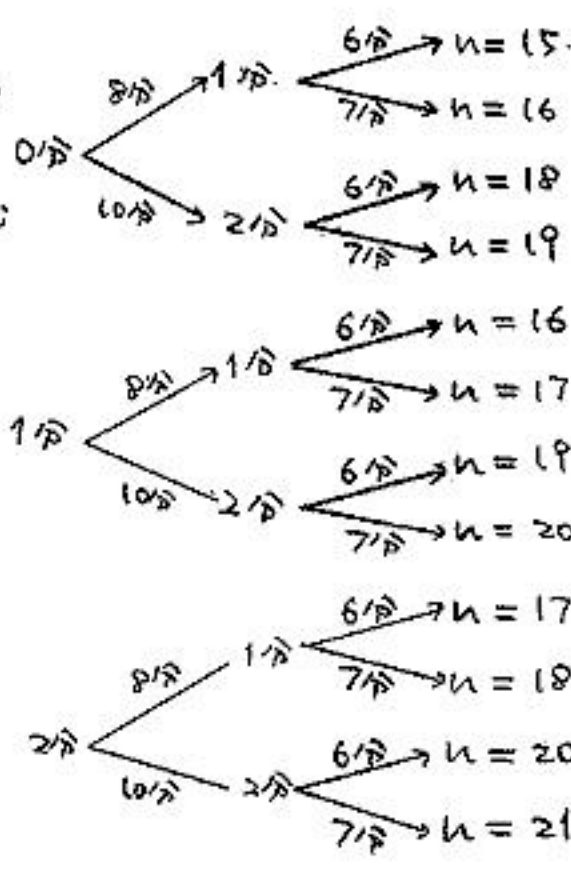
とすれば、確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

よって、 $n=15 \sim 21$

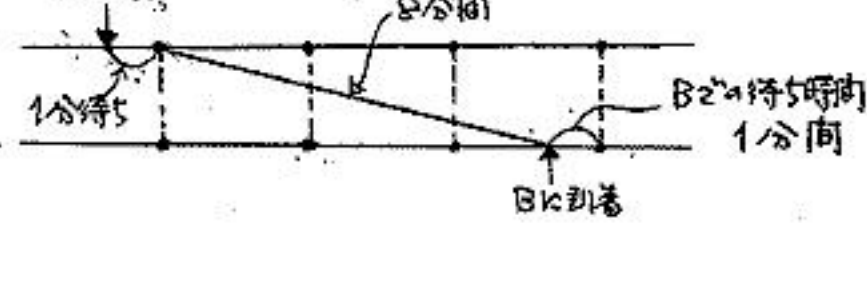
のときに対する確率

分布の表と表す。



n	15	16	17	18	19	20	21
P(n)	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

(注) A で 1 分待ち、B で 8 分待ち、たとき A B での待ち時間は



4

$$\begin{aligned} (1) \quad t^3 &= (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta \sin \theta + 9 \cos \theta \sin^2 \theta + 3\sqrt{3} \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 9 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + 3\sqrt{3} \sin \theta \\ &= 9 \cos \theta - 8 \cos^3 \theta + 3(1 - \cos \theta) \\ &= 6 \cos \theta - 8 \cos^3 \theta + 3 = -2 \cos 3\theta + 3 \\ \iff 2 \cos 3\theta &= 3 - t^3 \iff \cos 3\theta = \frac{3-t^3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad t^2 &= \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta \sin \theta + 3 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta + 3 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= 2 - \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta \quad ; \text{よって、(1) と同じ} \\ y &= -4 \times \frac{3-t^3}{2} + (2-t^2) + 2t \\ &= 2t^3 - t^2 - 4t + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad t &= \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \sin(\theta + 30^\circ) \text{ と令置すれば、} \\ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ &\iff 30^\circ \leq \theta + 30^\circ \leq 210^\circ \text{ であり、} t \text{ のとりうる} \\ \text{値の範囲は } -1 \leq t &\leq 2 \text{ と表す。} \end{aligned}$$

t	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...	1	...	2
f'	+	0	-	0	+		
f	3	$\nearrow \frac{80}{27}$	$\searrow -1$	$\nearrow 6$			

よって、右の増減を得る；

$$\begin{cases} t=6 \iff \theta=60^\circ \text{ のとき } \max. = 6 \\ t=1 \iff \theta=0^\circ \text{ or } 120^\circ \text{ のとき } \min. = -1 \end{cases}$$