

1

- (1) $\alpha = a^2 + bc, \beta = b(a+d), \gamma = c(a+d), \delta = d^2 + bc$
 なので $\alpha\delta - \beta\gamma$ に代入すると、

$$\begin{aligned}\alpha\delta - \beta\gamma &= (a^2 + bc)(d^2 + bc) - (a+d)^2 bc \\ &= a^2 d^2 + (a^2 + d^2)bc + b^2 c^2 - (a+d)^2 bc \\ &= a^2 d^2 - 2adbc + b^2 c^2 \\ &= (ad - bc)^2\end{aligned}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ より, $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ を得る.

- (2) $A^4 = E$ より,

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta\gamma = 1 & \dots\dots ① \\ \alpha\beta + \beta\delta = 0 & \dots\dots ② \\ \alpha\gamma + \gamma\delta = 0 & \dots\dots ③ \\ \beta\gamma + \delta^2 = 1 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

②③より, $\beta = \gamma = 0$ ($\alpha + \delta \neq 0$) とすると,

①④より,

$$\alpha^2 = 1, \delta^2 = 1$$

よって, $\alpha = \delta = \pm 1$

よって, $A^2 = E$ または $A^2 = -E$

また, ②③より, $\alpha + \delta = 0$ ($\beta \neq 0, \alpha \neq 0$)

とすると,

①+④より,

$$(\alpha + \delta)^2 - 2\alpha\delta + 2\beta\gamma = 2$$

$$\therefore \alpha\delta - \beta\gamma = -1$$

これは (1) に反する.

$$\therefore A^2 = E \text{ または } A^2 = -E \dots\dots (\text{答})$$

- (3) $BA = -BA \iff a+d=0, b+c=0$ であって, $A^2 = -E$

からの $a^2 + bc = -1$ をあわせれば

$$a^2 - b^2 = -1 \iff b = \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

よって, $b = \pm \sqrt{a^2 + 1}, c = \mp \sqrt{a^2 + 1}, d = -a$ (複号同順)

次に, $BA = -AB$ を繰り返して用いれば

$$A^m B A^n = A^m \times BA \times A^{n-1} = -A^{m+1} B A^{n-1}$$

$$= \dots\dots = (-1)^n A^{m+n} B$$

とできて, $A^m B A^n = AB$ は

$$(-1)^n A^{m+n} B = AB$$

$$\implies (-1)^n A^{m+n} = A \quad (\because B \text{ が存在})$$

$$\implies A^{m+n-1} = (-1)^n E \quad (\because A \text{ が存在})$$

$1 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 3 \implies 1 \leq m+n-1 \leq 5$ であり, $A^2 = -E$ から A それ自身は E の実数倍ではなく,

$$A^2 = -E \implies A^3 = -A \neq (-1)^n E$$

$$\implies A^4 = E \implies A^5 = A \neq (-1)^n E$$

であることから, 上の形になるのは,

$$A^2 = -E \dots\dots m+n-1=2, n: \text{奇数}$$

$$\iff (m, n) = (2, 1)$$

$$A^4 = E \dots\dots m+n-1=4, n: \text{偶数}$$

$$\iff (m, n) = (3, 2)$$

の 2通りである.

2

$$(1) \quad t^3 = (\cos \theta + j\sqrt{3}\sin \theta)^3$$

$$= \cos^3 \theta + 3j\sqrt{3}\cos^2 \theta \sin \theta + 9\cos \theta \sin^2 \theta + 3j\sqrt{3}\sin^3 \theta$$

$$= \cos^3 \theta + 9\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + 3j\sqrt{3}\sin^3 \theta$$

$$= 9\cos \theta - 8\cos^3 \theta + 3j\sqrt{3}(1 - \cos^2 \theta)$$

$$= 6\cos \theta - 8\cos^3 \theta + 3j\sqrt{3} = -2\cos^3 \theta + 3j\sqrt{3}$$

$$\iff 2\cos^3 \theta = 3j\sqrt{3} - t^3 \iff \cos^3 \theta = \frac{3j\sqrt{3}}{2} - \frac{t^3}{2}$$

$$(2) \quad t^2 = \cos^2 \theta + 2j\sqrt{3}\cos \theta \sin \theta + 3\sin^2 \theta$$

$$= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + j\sqrt{3}\sin 2\theta + 3 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$= 2 - \cos 2\theta + j\sqrt{3}\sin 2\theta \quad ; \text{ } t \text{ は } a \text{ の } \sqrt{3} \text{ 倍}$$

$$y = -4 \times \frac{3j\sqrt{3}}{2} + (2 - t^2) + 2t$$

$$= 2t^3 - t^2 - 4t + 2$$

$$(3) \quad t = \cos \theta + j\sqrt{3}\sin \theta = 2\cos(\theta + 30^\circ) \text{ と合成すれば,}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \iff 30^\circ \leq \theta + 30^\circ \leq 210^\circ \text{ なら } t \text{ は } 3 \text{ 倍}$$

値の範囲は, $-1 \leq t \leq 2$ となる.

$$f(t) = 2t^3 - t^2 - 4t + 2 \quad t \mid -1 \dots -\frac{2}{3} \dots 1 \dots 2$$

$$f'(t) = 6t^2 - 2t - 4 \quad f' \mid + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

$$= 2(3t+2)(t-1) \quad t \mid 3 \nearrow \frac{20}{3} \searrow -1 \nearrow 6$$

より, 右の増減を得る;

$$t=6 \iff \theta = 60^\circ \text{ のとき } \max. = 6$$

$$t=1 \iff \theta = 0^\circ \text{ or } 120^\circ \text{ のとき } \min. = -1$$

3

$$(1) \quad (\sqrt{f(x)})' = \left((4x-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} > 0 \text{ なら } 0 < x < 2$$

$$(\sqrt{f(x)})'' = \left(\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} \right)'$$

$$= \frac{2\sqrt{4x-x^2} - (2-x) \cdot \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2}$$

$$= -\frac{3x^2-6x+4}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0 \text{ (上の増減)}$$

なら, $y = \sqrt{f(x)}$ は $0 < x < 2$ に

凸凹の増減は右図のとおり.

よって, $0 < a_n < a_{n+1} < 2$

$$(2) \text{ 右図で適宜に注目すれば}$$

$$\frac{2-a_n}{2-a_{n+1}} > \frac{2}{2-c}$$

$$\implies \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n} < \frac{2-c}{2}$$

よって, 左の不等式は

$$2-a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2-a_n)$$

を得る.

$$(3) \text{ (2) をくり返し用いると}$$

$$0 < 2-a_n < \left(\frac{2-c}{2} \right)^{n-1} (2-c) \quad (n=1, 2, \dots)$$

よって, $0 < \frac{2-c}{2} < 1$ ($0 < c < 2$) なら,

$n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{2-c}{2} \right)^{n-1} \rightarrow 0$ であり, 1/2 以下の数

なら $2-a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), したがって

$$a_n \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る.

4

$$(1) \quad R(u, 0, 0) \text{ とすれば}$$

P, Q, R は平面 $x=u$

上の直角三角形であり,

右図で相似比が見える.

$$1: \sqrt{1-u^2} = u: 1$$

$$\iff 1 = u\sqrt{1-u^2}$$

$$(2) \text{ 平面 } x=u \text{ 上の線分 } PQ$$

は回転するが, 回転半径 u

最大値は (1) の 1 となる.

最大値は

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \implies 0 \leq u^2 \leq \frac{1}{2} \implies u \leq 1-u^2 \\ \implies PR = u \leq \sqrt{1-u^2} = QR \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1 \implies \frac{1}{2} \leq u^2 \leq 1 \implies u \geq 1-u^2 \\ \implies QR = \sqrt{1-u^2} \leq u = PR \end{cases}$$

よって, u と $1-u^2$ の最小値は平面 $x=u$ 上の線分 PQ

$$\text{は } \begin{cases} 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } \pi \{ (1-u^2) - u^2(1-u^2) \} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1 \text{ のとき } \pi \{ u^2 - u^2(1-u^2) \} \end{cases}$$

より, 求める値は

$$\pi \left\{ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2u^2+u^4) du + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^4 du \right\} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{5} \right) \pi$$

5

円の中心 E, F (実数) とする. $1, \alpha, \alpha^2$ が円周上にある条件は

$$|\alpha - 1| = |\alpha^2 - 1| = |1 - \alpha|$$

よって, 2通り

$$\begin{cases} (\alpha-1)(\alpha-1) = (1-\alpha)^2 \\ (\alpha^2-1)(\alpha^2-1) = (1-\alpha)^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha\alpha - 1(\alpha+\alpha) = 1-2\alpha \\ (\alpha\alpha)^2 - 1(\alpha^2+\alpha^2) = 1-2\alpha \end{cases}$$

と同値である. $\alpha \neq 1$; $\alpha\alpha = S, \alpha+\alpha = T$ とおくと, 2通り

$$\alpha^2 + \alpha^2 = (S-1)^2 - 2\alpha\alpha$$

であるから, 2通りを代入して条件を S, T に関する整理すると

$$\begin{cases} S-1 = T(T-2) & \dots\dots ① \\ S^2-1 = T(T-2S-2) & \dots\dots ② \end{cases}$$

また, 角 α と角 α^2 の関係は α は 2 次方程式

$$z^2 - Tz + S = 0 \quad \dots\dots ③$$

の解である.

もし, $T=2$ であるとする, ①より, $S=1$ となり ③は

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

であるから, $\alpha = 1$ となり 2 重根になる.

よって, $T \neq 2$ である. $T \neq 2$ なら, ①より

$$T = \frac{S-1}{T-2}$$

これを ②に代入して整理すると

$$(S-1)T(S+1-T) = 0$$

となる. よって, T のいずれかが成り立つ.

$$S=1, T=0, S=T-1$$

i) $S=1$ の場合

$$2\alpha \text{ の実部は } \alpha\alpha = 1 \therefore |\alpha| = 1 \text{ であるから,}$$

α は単位円周上の半径 1 の円周上にある. 仮定し, 2 重根

なら, $\alpha = \pm 1$ は解. また, 2 重根が条件を満たす

から, 求める円の半径は 1 である.

ii) $T=0$ の場合

$$③ \text{ は } z^2 + S = 0 \text{ となるから, } \alpha = \pm \sqrt{-S} \text{ である,}$$

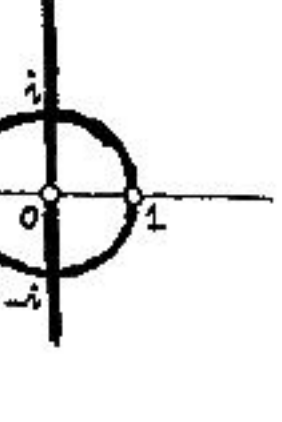
仮定し, 2 重根なら $\alpha = 0$ は解. $T=0$ なら, 2 重根

α は純虚数である.

α と α^2 の, 求める円の半径 r は,

$$\alpha^2 = -S \text{ であるから}$$

$$\frac{1-\alpha^2}{2} = \frac{1+|\alpha|^2}{2} \text{ である.}$$



iii) $S=T-1$ の場合

$$③ \text{ は } z^2 - Tz + T-1 = 0 \text{ となる. 2 の判別式は}$$

$$T^2 - 4(T-1) = (T-2)^2 \geq 0$$

となるので, α は (α, α^2) の実数である. $T \neq 2$ は

2 重根になる. 円と実軸は異なる点では交わらない

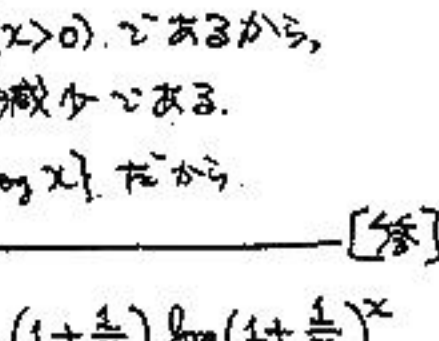
からである.

以上より, α の存在範囲

は右図のようになる集合であり,

条件にある円の半径は

$$\text{常に, } \frac{1+|\alpha|^2}{2} \text{ である.}$$



6

$$(1) \quad f'(x) = \log \frac{x+1}{x} + (x+1) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}$$

よって, $g(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}$ とおくと

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$$

$x > 0$ なら, $g'(x) < 0$ となるから, $g(x)$ は単調減少であり,

$g(0) = 0$ なら, $x > 0$ なら, $g(x) < 0$ である.

ゆえに, $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ ($x > 0$) であるから,

$f(x)$ は $x > 0$ で単調減少である.

$$(2) \quad f(x) = (x+1) \{ \log(x+1) - \log x \} \text{ なら}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{--- [答]}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \log \left(\frac{x+1}{x} \right) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad \text{--- [答]}$$

$$(3) \quad e > 2.7 \text{ である.}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e} + 1\right) \log(1+e) > 1 \cdot \log e = 2$$

$$f(1) = 2 \log 2 < 2 \log e = 2$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{e}\right) > 2 > f(1)$$

よって, $f(x)$ は単調減少であるから,

$f(x) = 2$ となる x は $\frac{1}{e} < x < 1$ の範囲に存在する.