

7

$$(1) \quad x = -(x-a)^2 + b \iff x^2 - (2a-1)x + a^2 - b = 0 \quad (*)$$

$$\{\text{判別式}\}/4 = (2a-1)^2 - 4(a^2 - b) = -4a + 1 + 4b = 0$$

$$\iff \underline{b = a - \frac{1}{4}}$$

このとき、DとLの接点のx座標は $a - \frac{1}{2}$ であり、CとLの交点のx座標は $x^2 - 2 = x \iff x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0$ より $x = -1$ と $x = 2$ である。
 $-1 \leq a - \frac{1}{2} \leq 2 \iff \underline{-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}}$ より a の取り得る範囲となる。

((別)) D の点 $(t, -(t-a)^2 + b)$ における接線の傾きが 1 となるのは

$$-2(t-a) = 1 \iff t = a - \frac{1}{2}$$

であり、 $y = \{x - (a - \frac{1}{2})\} - (-\frac{1}{2})^2 + b$ より原点を通るとき、

$$0 = -(a - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + b \iff b = a - \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad x^2 - 2 = -(x-a)^2 + a - \frac{1}{4} \iff 2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{7}{4} = 0$$

a 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。 $S(a) = 2 \times \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3$ であり、

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4 \times \frac{1}{2} (a^2 - a - \frac{7}{4})$$

$$= a^2 - 2a^2 + 2a + \frac{7}{2} = -a^2 + 2a + \frac{7}{2}$$

$$\therefore \underline{S(a) = \frac{1}{3} (-a^2 + 2a + \frac{7}{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$(3) \quad -a^2 + 2a + \frac{7}{2} = -(a-1)^2 + \frac{9}{2}; \quad -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \max. = \frac{9}{2} \quad (a=1), \quad \min. = \frac{9}{4} \quad (a=-\frac{1}{2}, a=\frac{5}{2})$$

よって、 $S(a)$ の max. & min. は

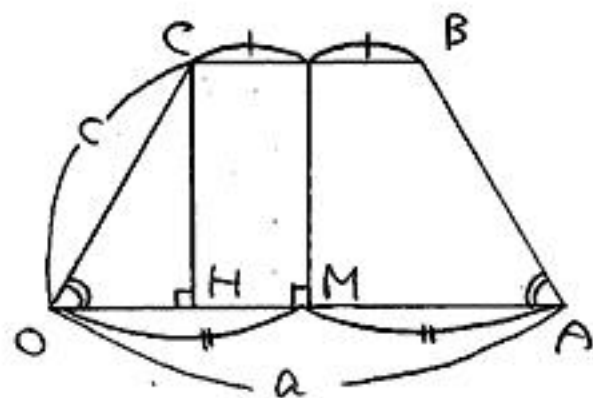
$$\begin{cases} \max. = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \\ \min. = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \end{cases}$$

$\geq$

(1) $\angle AOC$ が鈍角 α とするとき $m < 0$ かつ $a \geq 1$ である。
 明すべく $m < \frac{a^2}{2}$ が成立する。鋭角 α とするとき、右図より

$$\begin{aligned} m &= a \times c \times \cos \angle AOC' \\ &= a \times (c \times \cos \angle AOC') \\ &= a \times OH < a \times OM = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

ਅਨੰਤ ੨.



$$(2) \quad CB = OA - 2OH = a - 2(c \times \cos \angle AOC) = a - 2 \times \frac{1m}{a} \approx a - 2m$$

$$\frac{\vec{a}_G + \vec{a}_G}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(a - \frac{2m}{a} \right) + a \right\} = a - \frac{m}{a}$$

∴ あり、高さ = $CH = c \times \sin \angle AOC = c \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOC}$ ∴ あり、

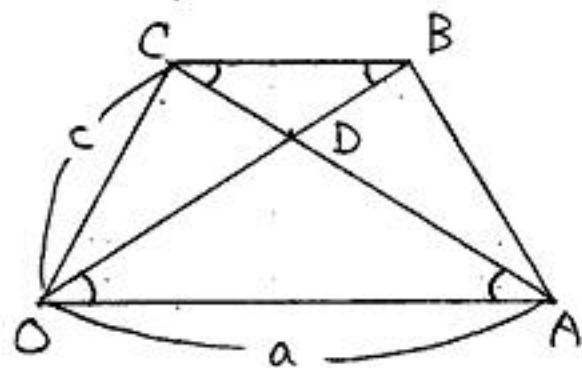
$$\frac{r}{a} = c \sqrt{1 - \frac{m^2}{a^2 c^2}} = \sqrt{c^2 - \frac{m^2}{a^2}}$$

$$\therefore S = \left(a - \frac{m}{a}\right) \sqrt{c^2 - \frac{m^2}{a^2}} \quad \text{अ. ३.}$$

(3) $\triangle OAC \equiv \triangle AOB$ より $AC = OB$ であり、 $\triangle ABC \equiv \triangle OCB$ である。
 これより、

$$\begin{cases} \angle OAC = \angle AOB, \\ \angle ACB = \angle OBC. \end{cases}$$

かわかり、 $\angle ODA = \angle BDC$ である。
 $\triangle DOA \sim \triangle DBC$ である。



∴ 知 a 相似比为 $OA:BC$, 又知 a , $a: \left(a - \frac{2m}{a}\right)^2 a^2$.

$$AD:DC = a:\left(a - \frac{2m}{a}\right) = a^2:(a^2 - 2m)$$

よ、2、次王得子；

$$\overrightarrow{OD} = \frac{(a^2 - 2m)\overrightarrow{OA} + a^2\overrightarrow{OC}}{2a^2 - 2m}$$

$$(1) \quad \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{2z}{z^2-i^2} = \frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{w} \Leftrightarrow 2zw = z^2+1 \quad z \neq 0,$$

$$(z-w)^2 = z^2 - 2zw + w^2 = -1 + w^2 \quad z \neq 0 \text{ かつ } z \neq w,$$

$$(z-w)^2 = -1 + (u+vi)^2 = \underline{u^2 - v^2 - 1 + 2uv i}$$

$$(2) \quad u=0 \text{ だとすると, (1) の結果から } (z-vi)^2 = -v^2 - 1 \text{ (虚数)} \text{ となり,}$$

$$(z-vi)^2 = \{x + (y-v)i\}^2 = x^2 + 2x(y-v)i - (y-v)^2$$

$$\text{となり } x(y-v)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ または } y-v=0 \text{ が必要である。}$$

$$x \neq 0 \text{ とすれば } y-v=0 \text{ となり } (z-vi)^2 = x^2 \text{ となり } x^2 > 0 \text{ となり, } -v^2-1 < 0 \text{ に矛盾がある。よって, } x=0 \text{ である。}$$

$$(3) \quad (z-w)^2 = -1 + w^2 \quad z \neq w \text{ かつ } w^2 \text{ の虚部 } u^2 - v^2 \text{ であり } u^2 - v^2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} -1 + w^2 &= -1 + (u^2 - v^2) + 2uv i = 2uv i \\ &= 2u \sqrt{u^2 - 1} i \quad (\because v^2 = u^2 - 1, v > 0) \end{aligned}$$

$$\text{であり, これは虚部のみ正の純虚数, 辐角は } \frac{\pi}{2} \text{ である。}$$

$$\text{また, 絶対値は } 2u\sqrt{u^2-1} \text{ であり, } z-w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ と}$$

$$\text{おけば, } (z-w)^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \text{ とおくと}$$

$$r^2 = 2u\sqrt{u^2-1}, \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{5\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2u\sqrt{u^2-1}}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ or } \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z-w) = x-u = \sqrt{2u\sqrt{u^2-1}} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\text{または } \sqrt{2u\sqrt{u^2-1}} \cos \frac{5\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = u \pm \sqrt{u\sqrt{u^2-1}}} \quad (\text{任意の } u > 1 \text{ は保証される})$$

4

(1) 3人のうち1人が勝つことであり、3手のうちどの手で勝つかを

考えれば; $\frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{3^3} = \frac{1}{3}$

(2) 3人のうち2人が勝つ確率が $\frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{3^3} = \frac{1}{3}$ であり、(1)と

これとの余事象として、3人のじゃんけんであいこになる確率が $\frac{1}{3}$ で

あることもわかる。また、2人のじゃんけんでは;

1人勝つ..... $\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{3^2} = \frac{2}{3}$, あいこ..... $\frac{1}{3}$

となる。

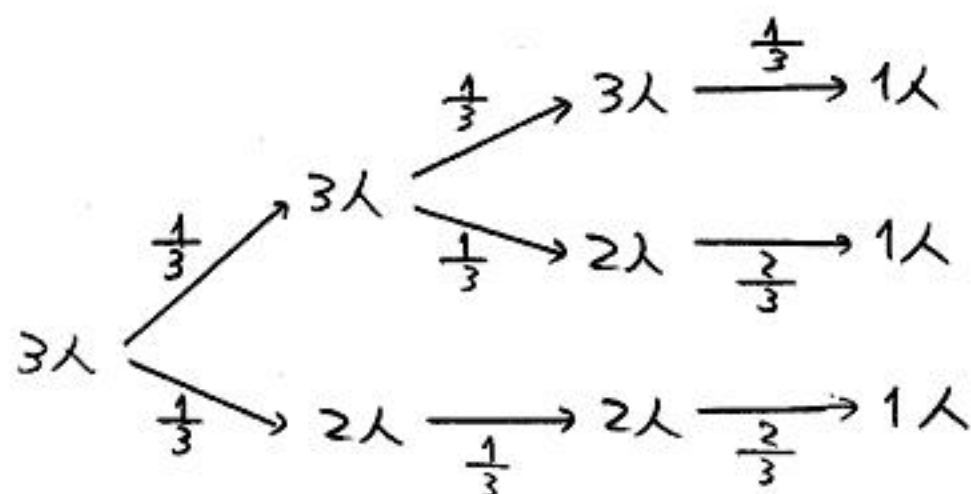
2回目まで決まるのは、

1回目あいこで2回目に1人勝つ

または、1回目に2人勝つて、2回目まで1人勝つ
あいずれかであり、その確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1+2}{9} = \frac{1}{3}$$

(3) 3回目まで決まるまでの勝った人数も考えると;



であり、各枝の確率を求めて合計すれば、

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{27}$$

(4) (3)の樹形図と同様に考えれば、

(i) 3人 → 3人 → 3人 → → 3人 → 1人

(ii) 3人 → → 3人 → 2人 → → 2人 → 1人

の2パターンであり、(ii)については 3人 → 2人 に人数が変わる場面が、
1回目 ~ (n-1)回目のいずれであるか (n-1)通りがある。しかし、
何回目であってとも枝の確率は、3人 → 3人も 3人 → 2人も 2人 → 2人も
すべて確率が $\frac{1}{3}$ である。 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3}$ である。

よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}\right)^n + (n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1 + 2(n-1)}{3^n} = \frac{2n-1}{3^n} \end{aligned}$$