

$$\boxed{1} \quad (1) \quad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 0 \text{ である},$$

$$\frac{1}{2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

したがって, $|\vec{k}\vec{a} + \vec{l}\vec{b}|^2 = k^2|\vec{a}|^2 + 2kl\vec{a} \cdot \vec{b} + l^2|\vec{b}|^2 = k^2 + kl + \frac{l^2}{2}$ である。
 整数であるための必要十分条件は, k と l が整数である。

$$\frac{l^2}{2} \text{ が整数} \Leftrightarrow l^2 \text{ が偶数} \Leftrightarrow l \text{ が偶数}$$

である。

$$(2) \quad k^2 + kl + \frac{l^2}{2} = 0 \text{ である} \Leftrightarrow l = 2m \text{ である},$$

$$k^2 + 2km + 2m^2 = (k+m)^2 + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k+m=m=0 \Leftrightarrow k=m=0$$

よって, 求める (k, l) は $(0, 0)$ のみである。

$$(3) \quad k^2 + kl + \frac{l^2}{2} = \frac{2k^2 + 2kl + l^2}{2} = \frac{k^2 + (k+l)^2}{2} \quad (\text{すなわち, } k \text{ と } l \text{ が}$$

$(k, l) \neq (0, 0)$ なる整数を動くとき、明らかにその最小値は $\frac{1}{2}$ である。よって, $k^2 + (k+l)^2 = 1$ を満たす (k, l) を求めよと;

$$(k, k+l) = (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$$

$$\Leftrightarrow (k, l) = \underline{(0, 1), (0, -1), (1, -1), (-1, 1)}$$

- [2] (1) C_1 の座標は $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}}$ において単調増加であり, y 座標についても $-3t^5 + 5t^3 = -3t^3(t + \sqrt{\frac{5}{3}})(t - \sqrt{\frac{5}{3}})$ であり, $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}}$ ならば $y \geq 0$ ($y=0 \iff t=0, t=\sqrt{\frac{5}{3}}$) である. よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} (-3t^5 + 5t^3)(30t^3) dt &= 30 \left[-\frac{t^9}{9} + \frac{5}{7} t^7 \right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \\ &= 30 \left(-\frac{1}{9} \times \frac{625}{81} \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{5}{7} \times \frac{125}{27} \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \\ &= \left(-\frac{6250}{81} + \frac{6250}{63} \right) \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{6250}{567} (-7+9) \sqrt{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{12500}{567} \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \left(= \frac{12500\sqrt{15}}{1701} \right) \end{aligned}$$

(2) C_1 について, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (30t^3)^2 + (-15t^4 + 15t^2)^2$

$$\begin{aligned} &= 900t^6 + 225t^8 - 450t^6 + 225t^4 \\ &= 225(t^8 + 2t^6 + t^4) = \{15t^2(t^2+1)\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} 15t^2(t^2+1) dt &= 15 \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} \\ &= 3 \times \frac{25}{9} \sqrt{\frac{5}{3}} + 5 \times \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{50}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \left(= \frac{50\sqrt{15}}{9} \right) \end{aligned}$$

C_2 について, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよう. $2\pi(-t + \sqrt{\frac{5}{3}}) = T$ と置換して,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{125}{6} \times 3 \cos^2 T (-\sin T) \times (-2\pi) = 125\pi \cos^2 T \sin T \\ \frac{dy}{dt} = \frac{125}{6} \times 3 \sin^2 T \cos T \times (-2\pi) = -125\pi \sin^2 T \cos T \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (125\pi)^2 (\cos^4 T \sin^2 T + \sin^4 T \cos^2 T) \\ = (125\pi \sin T \cos T)^2 \end{aligned}$$

$\sqrt{\frac{5}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \geq T \geq -\frac{\pi}{2}$, $-2\pi dt = dT$; である, $\sin T \leq 0$ である

$$\begin{aligned} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (-125\pi \sin T \cos T) \left(-\frac{1}{2\pi} dT\right) \\ = \frac{125}{4} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin 2T dT = \frac{125}{4} \left[-\frac{\cos 2T}{2} \right]_0^{-\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{125}{8} (1+1) = \frac{125}{4} \end{aligned}$$

C_3 は y 軸上の線分であり, その長さは

$$\frac{125}{6 \left(\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)} \left\{ 2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\right) \right\} = \frac{125}{6 \left(\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)} \left(\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{125}{6}$$

以上の合計として, 求める道長は

$$\frac{50\sqrt{15}}{9} + \frac{125}{4} + \frac{125}{6} = \frac{50\sqrt{15}}{9} + \frac{625}{12}$$

3

$\{x_n\}$ a 一般項 x_k は $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^2 x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\log Q(n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \log x dx \\ &= [x \log x - x]_1^2 = 2 \log 2 - 1 = \log \frac{4}{e}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \frac{4}{e}}}$$

$\{y_n\}$ a 一般項 y_k は $y_k = (\sqrt[n]{2})^k = 2^{\frac{k}{n}}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x dx \\ &= \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 = \frac{2-1}{\log 2} = \underline{\underline{\frac{1}{\log 2}}} (= \log_2 e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\log S(n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \log 2^x dx \\ &= \int_0^1 x \log 2 dx = \log 2 \times \int_0^1 x dx = \log \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \sqrt{2}}}$$

- 4 (1) 3回目を和を5と選ぶのは, $\{1, 2, 2\}$ ではなく $\{1, 1, 3\}$ であり.

$$Q(5) = \frac{3!}{2!} p_1 p_2^2 + \frac{3!}{2!} p_1^2 p_3 = 3 p_1 (p_2^2 + p_1 p_3)$$

$$\therefore \text{よって } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 2(p_1 + p_2 + p_3) = 1 \text{ である.}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} \iff p_3 = \frac{1}{2} - p_1 - p_2$$

であり, 上は

$$3 p_1 \left\{ p_2^2 + p_1 \left(\frac{1}{2} - p_1 - p_2 \right) \right\} = \underline{3 p_1 \left(p_2^2 - p_1^2 - p_1 p_2 + \frac{p_1}{2} \right)}$$

- (2) 3回目を和を7と選ぶのは, $\{1, 1, 5\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 3\}$ ではなく $\{2, 2, 3\}$ であり,

$$Q(7) = 3 p_1^2 p_5 + 6 p_1 p_2 p_4 + 3 p_1 p_3^2 + 3 p_2^2 p_3$$

$$= 3 p_1^2 p_2 + 6 p_1 p_2 p_3 + 3 p_1 p_3^2 + 3 p_2^2 p_3$$

$$= 3 p_1^2 p_2 + p_1 p_2 + \frac{p_1}{12} + \frac{p_2^2}{2}$$

$$\therefore \text{よって } p_1 + p_2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \iff p_2 = \frac{1}{3} - p_1 \text{ である. } Q(7) \text{ はさらに}$$

$$3 p_1^2 \left(\frac{1}{3} - p_1 \right) + p_1 \left(\frac{1}{3} - p_1 \right) + \frac{p_1}{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - p_1 \right)^2$$

$$= -3 p_1^3 + \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{12} p_1 + \frac{1}{18}$$

と表せる. $f(x) = -3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{18}$ とおいて $0 < x < 1$ と仮定すると,

$$f'(x) = -9x^2 + x + \frac{1}{12} = -9 \left(x^2 - \frac{x}{9} - \frac{1}{108} \right) = -9 \left(x - \frac{1}{6} \right) \left(x + \frac{1}{18} \right) \text{ より,}$$

$x = p_1 = \frac{1}{6}$ である時に最大値をとり, 最大値は

4.2. 求める p_1, p_2 は $p_1 = p_2 = \frac{1}{6}$ であり, 最大値は

$$\underline{15 \times \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{5}{72}} \quad \left(\because p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{6} \right)$$

5

$$(1) \operatorname{Re}(z^3 - z) = 0 \Leftrightarrow z^3 - z \text{ は虚数} \Leftrightarrow z^3 - z + \overline{z^3 - z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 + \overline{z}^3 - z - \overline{z} = (z + \overline{z})(z^2 - z\overline{z} + \overline{z}^2 - 1) = 0$$

$\therefore z, |z|=1$ より $z\overline{z}=1$ より z^2 と $\overline{z}$ とは等しい

$$(z + \overline{z})(z^2 - z\overline{z} + \overline{z}^2 - 1)^2 = (z + \overline{z})(z - \overline{z})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \text{ あるいは } z = \overline{z}$$

$$\Leftrightarrow z \text{ は虚数 あるいは 実数}$$

よって $|z|=1$ と $z = \pm 1$ の 4 個である。

$$(2) |z^5 + z| = |z||z^4 + 1| = 1 \Leftrightarrow |z^4 + 1| = 1 \quad (\because |z|=1); \text{ よって}$$

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \text{ とする}$$

$$z^4 + 1 = \cos 4\theta + 1 + i \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow |z^4 + 1|^2 = (\cos 4\theta + 1)^2 + \sin^2 4\theta$$

$$= 2(1 + \cos 4\theta) = 1$$

$$\therefore \cos 4\theta = -\frac{1}{2} \quad (0 \leq 4\theta < 8\pi)$$

$$\text{よって } 4\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}, \frac{20\pi}{3}, \frac{22\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}; \text{ よって}$$

これを単位円上で確認すれば、複号に注意して 8 個である。

$$\underline{\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$(3) z = \cos \theta + i \sin \theta \text{ とする } z^n + 1 = \cos n\theta + 1 + i \sin n\theta \text{ であり}$$

$$(\cos n\theta + 1)^2 + \sin^2 n\theta = 2(1 + \cos n\theta) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos n\theta = -\frac{1}{2} \quad (0 \leq n\theta < 2n\pi)$$

$$z \text{ を求める } n\theta \text{ は } \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \text{ と } \frac{4\pi}{3} + k \times 2\pi \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

$$\text{であり、} \theta \text{ は } \frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ と } \frac{4\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

となる。 $|z^n + 1| = 1$ を満たす z の z をかけ合わせると複素数の絶対値は 1 であり、偏角は、これを $2n$ 個の θ を加えたもの

となる。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + \left(\frac{4\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4\pi}{n} \cdot k \right) = 2\pi + \frac{4\pi}{n} \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= 2\pi + 2(n-1)\pi = 2n\pi$$

よって、求める複素数は

$$\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = \underline{1}$$

$$\boxed{6} \quad (1) \quad AA = A^2 = (-1+1)A - \{(-1) \times 1 - 0 \times 0\}E = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BB = B^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)B - \left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}E = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (2) 題意の種を左から順に見て行くと、Aの連続部分とBの連続部分のそれぞれ1つずつ登場することになり区切りを入れに行く。このとき、(1)により、 $A^m B^n$ の m と n の偶奇に応じて、 E, A, B, AB のいずれかになり、 $B^n A^m$ については E, A, B, BA のいずれかになるから、注意の種は、

$$E, A, B, AB, BA, (AB)^p A, (BA)^q B$$

となることを示す。

$$\text{ここに、} ABA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$BAB = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であり、これは一致するから、

$$\left\{ \begin{array}{l} (AB)^2 A = ABA \times BA = BAB \times BA = BAB^2 A \\ \quad = BAE A = BA^2 = BE = B \\ \Rightarrow (AB)^3 A = AB \times (AB)^2 A = AB \times B = AB^2 = A \\ \\ (BA)^2 B = BAB \times AB = ABA \times AB = ABA^2 B \\ \quad = ABE B = AB^2 = AE = A \\ \Rightarrow (BA)^3 B = BA \times (BA)^2 B = BA \times A = BA^2 = B \end{array} \right.$$

という具合に、 $(AB)^p A$ と $(BA)^q B$ の形のもの

$$A, B \quad \text{または} \quad ABA (=BAB)$$

に変形できる。

(以下) 2. 作られる行列は次の6個である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$