

$$\text{II} \quad \begin{cases} (1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e} \\ (1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e}) \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \vec{a} = \frac{t}{1-t}\vec{e} \\ \vec{b} = \frac{1-t}{t}\vec{e} \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

また、 $(\vec{x} - \vec{a}) \perp (\vec{x} - \vec{b})$ あり

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 - \left(\frac{t}{1-t} + \frac{1-t}{t}\right) \vec{x} \cdot \vec{e} + |\vec{e}|^2 = 0 \dots \textcircled{2}$$

さらに $|\vec{x} - \vec{a}| : |\vec{x} - \vec{b}| = t : (1-t)$ あり $(1-t)|\vec{x} - \vec{a}| = t|\vec{x} - \vec{b}|$

$0 < t < \frac{1}{2}$ あり両辺をともに正だから、2乗して

$$(1-t)^2 |\vec{x} - \vec{a}|^2 = t^2 |\vec{x} - \vec{b}|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$(1-t)^2 (|\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2) = t^2 (|\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$\Leftrightarrow \textcircled{1}$

$$(1-t)^2 \left[|\vec{x}|^2 - \frac{2t}{1-t} \vec{x} \cdot \vec{e} + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \right] = t^2 \left[|\vec{x}|^2 - 2 \cdot \frac{1-t}{t} \vec{x} \cdot \vec{e} + \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$(2t-1)(|\vec{x}|^2 - 1) = 0$$

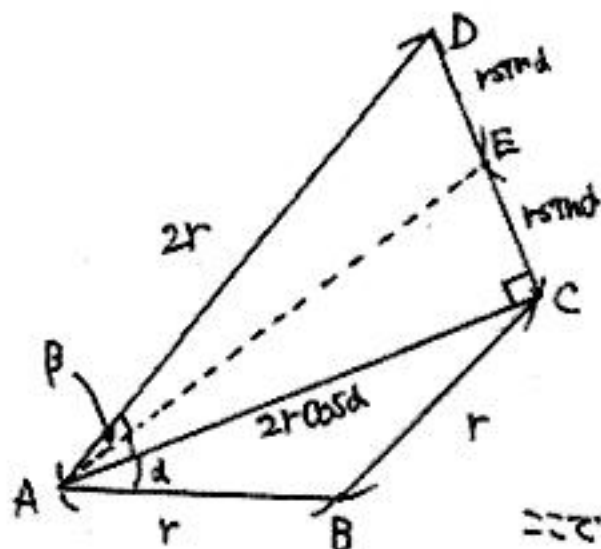
ここで $0 < t < \frac{1}{2}$ あり $|\vec{x}|^2 \neq 1$ であるから $|\vec{x}| = 1$

これを②に代入して

$$1 - \left(\frac{t}{1-t} + \frac{1-t}{t}\right) \vec{x} \cdot \vec{e} + 1 = 0$$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{e} = \frac{2t(1-t)}{2t^2 - 2t + 1} \quad \#$$

2



$$(1) \triangle ABC = \triangle ACE = \triangle ADE \text{ あり}$$

$$2\triangle ABC = \triangle ACD \dots \textcircled{1}$$

あり.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot r \cdot \sin \alpha$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot 2r \cdot \sin \beta$$

$\therefore \textcircled{1}$ に代入して

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

ここで $\alpha + \beta < 90^\circ$ あり

$\therefore \alpha = \beta$ を得る //

(2) $\triangle ABC$ は二等辺三角形より $AC = 2r \cos \alpha$.

$\therefore \triangle ACD$ は $\angle ACD = 90^\circ$ の直角三角形.

したがって

$$\begin{aligned} \sin \angle EAC &= \frac{EC}{AE} \\ &= \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(2r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2}} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

一方 $\angle DAB = 2\alpha$, $2\alpha < 90^\circ$ かつ α (鋭角) あり.

$$\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

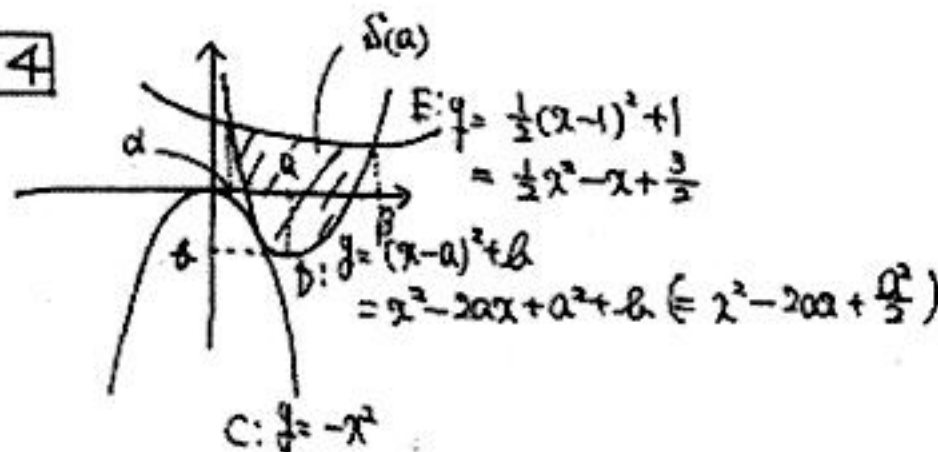
$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{5} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{4}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ に代入して

$$\sin \angle EAC = \frac{1}{\sqrt{11}} //$$

4



CとDが接するので

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = x^2 - 2ax + a^2 + b \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0 \text{ は重解をもつ}$$

おて判別式 $D=0$ より

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - 2(a^2 + b) \\ &= -a^2 - 2b \end{aligned} \quad \therefore b = -\frac{a^2}{2}$$

次にDとEの交点の2座標を α, β とおく. ($\alpha < \beta$)

α, β は

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \\ y = x^2 - 2ax + \frac{a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - (2a-1)x + \frac{a^2}{2} - \frac{3}{2} = 0 \text{ の2解である.}$$

解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 4a - 2 \\ \alpha\beta &= a^2 - 3 \end{aligned} \quad \therefore \beta - \alpha = \sqrt{(4a-2)^2 - 4(a^2-3)} \\ &= 2\sqrt{3a^2 - 4a + 4} \\ &= 2\sqrt{3(a-\frac{2}{3})^2 + \frac{8}{3}}$$

$$S(a) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \right) - \left(x^2 - 2ax + \frac{a^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left(-\frac{1}{2} + (2a-1)x - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$$

$$= \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ 3(a-\frac{2}{3})^2 + \frac{8}{3} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

$\therefore S(a)$ は $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{9}$ とき最小値 $\frac{32\sqrt{6}}{27} \in C3$