

$$\text{II} \quad \begin{cases} (1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e} \\ (1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e}) \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \vec{a} = \frac{t}{1-t}\vec{e} \\ \vec{b} = \frac{1-t}{t}\vec{e} \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

また、 $(\vec{x} - \vec{a}) \perp (\vec{x} - \vec{b})$ あり

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 - \left(\frac{t}{1-t} + \frac{1-t}{t}\right) \vec{x} \cdot \vec{e} + |\vec{e}|^2 = 0 \dots \textcircled{2}$$

さらに $|\vec{x} - \vec{a}| : |\vec{x} - \vec{b}| = t : (1-t)$ あり $(1-t)|\vec{x} - \vec{a}| = t|\vec{x} - \vec{b}|$

$0 < t < \frac{1}{2}$ あり両辺をともに正だから、2乗して

$$(1-t)^2 |\vec{x} - \vec{a}|^2 = t^2 |\vec{x} - \vec{b}|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$(1-t)^2 (|\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2) = t^2 (|\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$\Leftrightarrow$

$$(1-t)^2 \left[|\vec{x}|^2 - \frac{2t}{1-t} \vec{x} \cdot \vec{e} + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \right] = t^2 \left[|\vec{x}|^2 - 2 \cdot \frac{1-t}{t} \vec{x} \cdot \vec{e} + \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$(2t-1)(|\vec{x}|^2 - 1) = 0$$

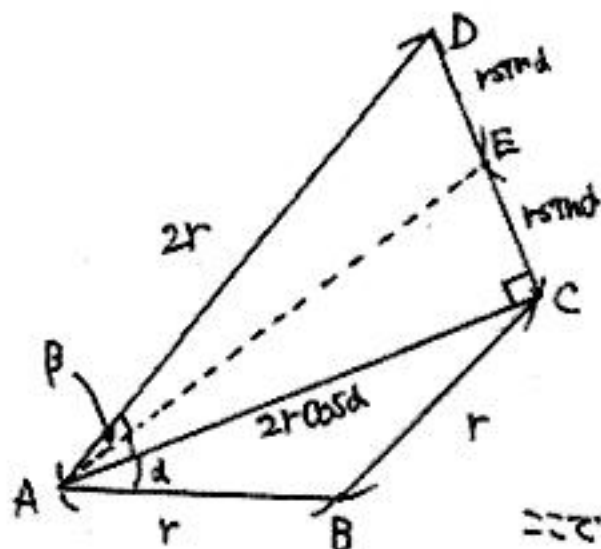
ここで $0 < t < \frac{1}{2}$ あり $|\vec{x}|^2 \neq 1$ であるから $|\vec{x}| = 1$

これを②に代入して

$$1 - \left(\frac{t}{1-t} + \frac{1-t}{t}\right) \vec{x} \cdot \vec{e} + 1 = 0$$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{e} = \frac{2t(1-t)}{2t^2 - 2t + 1} \quad \#$$

2



(1) $\triangle ABC = \triangle ACE = \triangle ADE$ より

$2\triangle ABC = \triangle ACD \dots \textcircled{1}$

また

$\triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot r \cdot \sin \alpha$

$\triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot 2r \cdot \sin \beta$

$\therefore \textcircled{1}$ に代入して

$\sin \alpha = \sin \beta$

ここで $\alpha + \beta < 90^\circ$ より

$\alpha = \beta$ を得る //

(2) $\triangle ABC$ は二等辺三角形より $AC = 2r \cos \alpha$.

$\therefore \triangle ACD$ は $\angle ACD = 90^\circ$ の直角三角形.

したがって

$$\begin{aligned} \sin \angle EAC &= \frac{EC}{AE} \\ &= \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(2r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2}} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

一方 $\angle DAB = 2\alpha$, $2\alpha < 90^\circ$ より α は鋭角.

$\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$

$\therefore \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{5} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{4}{5} \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\textcircled{2}$ に代入して

$\sin \angle EAC = \frac{1}{\sqrt{11}}$ //

③ (1) 求める確率を P_R とし、 i 回目に取り出したカードの数字を x_i とすると、

$$P_R = (x_1 < x_2 < \dots < x_{R-1} \text{ とする確率}) - (x_1 < x_2 < \dots < x_R \text{ とする確率})$$

$$= \frac{n C_{R-1}}{n^{R-1}} - \frac{n C_R}{n^R}$$

(2)

$$f(n) = \sum_{R=2}^{n+1} R \left(\frac{n C_{R-1}}{n^{R-1}} - \frac{n C_R}{n^R} \right)$$

$$= \sum_{R=2}^{n+1} (R-1) \frac{n C_{R-1}}{n^{R-1}} - R \frac{n C_R}{n^R} + \frac{n C_{R-1}}{n^{R-1}}$$

$$= \sum_{R=2}^{n+1} \left\{ (R-1) \frac{n C_{R-1}}{n^{R-1}} - R \frac{n C_R}{n^R} \right\} + \sum_{R=2}^{n+1} \frac{n C_{R-1}}{n^{R-1}}$$

$$= (2-1) \frac{n C_1}{n} - (n+1) \frac{n C_{n+1}}{n^{n+1}} + \sum_{R=1}^n \frac{n C_R}{n^R} \quad \checkmark R=1 \text{ とおいた。}$$

$$= 1 + \sum_{R=1}^n \frac{n C_R}{n^R}$$

$$= \sum_{R=0}^n \frac{n C_R}{n^R} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\odot = \text{二項定理})$$

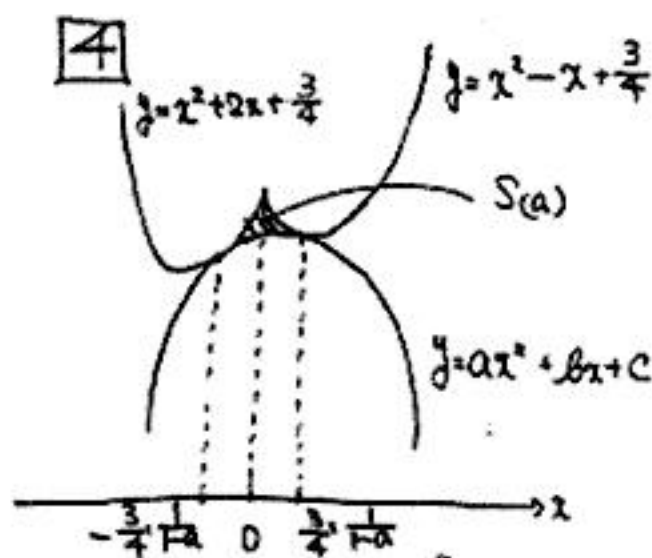
したがって 自然対数の定義より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

以上まとめると

$$\boxed{\begin{aligned} f(n) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) &= e \end{aligned}}$$

4



$$\begin{cases} y = x^2 - x + \frac{3}{4} \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

片接するから

$$(1-a)x^2 - (b+1)x + \frac{3}{4} - c = 0 \dots ①$$

の判別式 $D = 0$ より

$$\begin{aligned} D &= (b+1)^2 - 4(1-a)\left(\frac{3}{4} - c\right) \\ &= b^2 + 2b + 1 - (1-a)(3-4c) = 0 \dots ② \end{aligned}$$

また、 $\begin{cases} y = x^2 + 2x + \frac{3}{4} \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ 片接するから

$$(1-a)x^2 + (2-b)x + \frac{3}{4} - c = 0 \dots ③$$

の判別式 $D' = 0$ より

$$\begin{aligned} D' &= (2-b)^2 - 4(1-a)\left(\frac{3}{4} - c\right) \\ &= b^2 - 4b + 4 - (1-a)(3-4c) = 0 \dots ④ \end{aligned}$$

②-④より $6b-3=0 \therefore b = \frac{1}{2}$

再度②に代入して $c = \frac{3}{16} \cdot \frac{1-4a}{1-a}$

①に代入して

$$(1-a)\left(x - \frac{3}{4} \frac{1}{1-a}\right)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{4} \frac{1}{1-a}$$

③に代入して

$$(1-a)\left(x + \frac{3}{4} \frac{1}{1-a}\right)^2 = 0 \quad \therefore x = -\frac{3}{4} \frac{1}{1-a}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-\frac{3}{4} \frac{1}{1-a}}^0 (1-a)\left(x + \frac{3}{4} \frac{1}{1-a}\right)^2 dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{3}{4} \frac{1}{1-a}} (1-a)\left(x - \frac{3}{4} \frac{1}{1-a}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1-a}{3} \left(x + \frac{3}{4} \frac{1}{1-a}\right)^3 \right]_{-\frac{3}{4} \frac{1}{1-a}}^0 + \left[\frac{1-a}{3} \left(x - \frac{3}{4} \frac{1}{1-a}\right)^3 \right]_0^{\frac{3}{4} \frac{1}{1-a}} \\ &= \frac{a}{32(1-a)^2} \quad \text{H} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay & ax \\ aw & az \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz & bw \\ bx & by \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} ay+bz & ax+bw \\ bx+aw & by+az \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} ay+bz=1 \\ by+az=-1 \\ bx+bw=0 \\ bx+aw=0 \end{cases} \quad x=w=0 \quad \therefore y=\frac{1}{a-b}, z=-\frac{1}{a-b}$$

$$\therefore C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \\ -\frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} \dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{cases} A_{n+1} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

を辺々引くと,

$$(A_{n+1} - C) \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} (A_n - C) = 0$$

$$\therefore A_{n+1} - C = - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}}_{B} (A_n - C) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$B \text{ とおく} \quad \quad A \text{ とおく}$$

したがって

$$A_n - C = (-1)^{n-1} B^{n-1} (A_1 - C) A^{n-1}$$

 B についての *Cayley-Hamilton* より $B^2 = b^2 E$ A についての *Cayley-Hamilton* より $A^2 = \frac{1}{a^2} E$

に注意する.

 n : 奇数のとき ($n = 2k-1$ とおく)

$$\begin{aligned} A_{2k-1} - C &= (-1)^{2k-2} B^{2k-2} (A_1 - C) A^{2k-2} \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^{2k-2} (A_1 - C) \\ \therefore A_n &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \\ -\frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} - \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \\ -\frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

 n : 偶数のとき ($n = 2k$ とおく)

$$\begin{aligned} A_{2k} - C &= (-1)^{2k-1} B^{2k-1} (A_1 - C) A^{2k-1} \\ &= -\left(\frac{b}{a}\right)^{2k-2} B (A_1 - C) A \\ &= -\left(\frac{b}{a}\right)^{2k-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} \\ \therefore A_n &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \\ -\frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \\ -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$A_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\} \\ \frac{1}{a-b} \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} - 1 \right\} & 0 \end{pmatrix} & (n: \text{奇数}) \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a-b} \left\{ 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \right\} \\ \frac{1}{a-b} \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^n - 1 \right\} & 0 \end{pmatrix} & (n: \text{偶数}) \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(3) (2) より, $\left| \frac{b}{a} \right| > 1$ なら収束せず, $\left| \frac{b}{a} \right| < 1$ なら収束する.

$$\therefore |b| < |a| \quad \dots (\text{答})$$

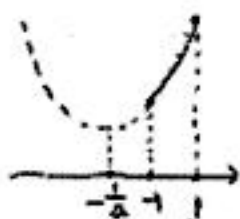
$$\boxed{6} \quad (1) \quad f'(x) = \frac{-\sin x}{(a \cos x + 1)^2} (2a \cos^2 x + 4a \cos x + 3a) \quad \textcircled{1}$$

①の部分の $\cos x$ を t に置きかえて

$$g(t) = 2at^2 + 4t + 3a$$

$$= 2a\left(t + \frac{1}{a}\right)^2 + 3a - \frac{2}{a}$$

は、 $-1 \leq t \leq 1$ において、 $0 < a < 1$ により単調増加する



$$g(-1) \geq 0$$

とすればよい $\therefore 2a(-1)^2 + 4(-1) + 3a \geq 0 \quad \therefore \frac{4}{5} \leq a < 1$

(2) (1)より $a \geq \frac{4}{5}$ のときは、 $f(x)$ が単調に減少するので $f(0)$ が最大値となるのはよい。

$a < \frac{4}{5}$ のときを考える。

このとき、 $\cos x$ は $0 \leq x \leq \pi$ において、 1 から -1 まで単調に減少するので、

$$f'(x) = 0$$

となる $0 < x < \pi$ がただ1つ存在する。

$f(x)$ の増減は、以下のようになる。

x	0	$\dots$	α	$\dots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\therefore f(0) \geq f(\pi)$ とみればよい

$$f(0) = \frac{1}{a+1}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{1-a}$$

$$f(0) - f(\pi) = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{2a}{(1-a)(1+a)} > 0$$

ゆえに $f(0) > f(\pi)$ となり、 $f(x)$ は $0 \leq x \leq \pi$ において $f(0)$ が最大値にもつ //