

$$\begin{aligned}
 (1) \quad P &= (x+a)^2 - \{3c(y+b)\}^2 \\
 &= (x-3cy+a-3bc)(x+3cy+a+3bc) \cdots (\text{答}) \\
 Q &= \{(x+11)+4y\}\{(x+11)+9y\} \\
 &= (x+4y+11)(x+9y+11) \cdots (\text{答}) \\
 R &= x^2 + (py+2qy+4)x + 2pqy^2 + (11p-4q)y - 77 \\
 &= x^2 + (py+2qy+4)x + (2qy+11)(py-7) \\
 &= (x+2qy+11)(x+py-7) \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) 各 1 次の因子を、 x の係数を 1 に統一して考える。

まず、 Q と R が共通の因数を持つことから、

各因数の定数項を見ることにより、

$$x+4y+11 = x+2qy+11 \quad \text{or} \quad x+9y+11 = x+2qy+11$$

とわかる。ここで q は整数より、前者しか有り得ず

$$q=2 \cdots \textcircled{1} \quad \text{とわかる。}$$

①より、 R と P の共通因子は $x+py-7$ でなければならない。 $(c$ が整数より。)

同様に、 Q と P の共通因子は $x+9y+11$ でなければならない。

この 2 つは (定数項が違うので) 別の式であるから、 P の各因子の対応を考えて、係数だけ抜き出すと

$$\begin{cases} -3c=p \\ a-3bc=-7 \\ 3c=9 \\ a+3bc=11 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 3c=p \\ a+3bc=-7 \\ -3c=9 \\ a-3bc=11 \end{cases}$$

これを解いて、

$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \\ p=-9 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-3 \\ p=-9 \end{cases} \cdots \textcircled{2}$$

を得る。(どちらも条件を満たす。)

以上①,②より、

$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\pm 3 \\ p=-9 \\ q=2 \end{cases} \cdots (\text{答})$$

2.

選んだ3個の球の組み合わせを素事象とする。これら
 ${}_7C_3 = 35$ 通りは同様に確からしいと考えられる。

$$X = k \quad (k = 3, 4, \dots, 7)$$

$\iff$ k の球を選び、他2つは全て $1 \sim k-1$ の中から選ぶ
 で、この組の数は $1 \times {}_{k-1}C_2 = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ であるから、

$$P(X = k) = \frac{1}{35} \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

よって、 X の期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=3}^7 \frac{1}{35} \frac{k(k-1)(k-2)}{2} \\ &= \frac{1}{70} \sum_{k=3}^7 \frac{\{(k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)\}}{4} \\ &= \frac{1}{70} \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4} = 6 \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

Z のとりうる値は $1 \sim 5$ より、

$$Z = 8 - k \quad (k = 3, 4, \dots, 7)$$

$\iff 8 - k$ の球を選び、他2つは全て $(8 - k) + 1 \sim 7$ の中から選ぶ

で、この組の数は $1 \times {}_{7-(8-k)}C_2 = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ であるから、

$$P(Z = 8 - k) = \frac{1}{35} \frac{(k-1)(k-2)}{2} \quad (k = 3, 4, \dots, 7)$$

よって、 Z の期待値は

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=3}^7 (8 - k) \frac{1}{35} \frac{(k-1)(k-2)}{2} \\ &= 8 \underbrace{\sum_{k=3}^7 \frac{1}{35} \frac{(k-1)(k-2)}{2}}_{\text{全確率}=1} - \underbrace{\sum_{k=3}^7 k \frac{1}{35} \frac{(k-1)(k-2)}{2}}_{=E(X)} \\ &= 8 - 6 = 2 \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

最後に、 $Y = k \quad (k = 2, 4, \dots, 6)$

$\iff$ k の球を選び、他2つは $1 \sim k-1, k+1 \sim 7$ の中から1個ずつ選ぶ

で、この組の数は $(k-1)(7-k)$ であるから、

$$P(Y = k) = \frac{1}{35} (k-1)(7-k)$$

よって、 Y の期待値は

$$E(Y) = \sum_{k=2}^6 k \frac{1}{35} (k-1)(7-k) \dots \textcircled{1}$$

一方、 k の代わりに $8 - k$ を考えると、

$$P(Y = 8 - k) = \frac{1}{35} ((8 - k) - 1)(7 - (8 - k)) = \frac{1}{35} (k-1)(7-k)$$

$(k = 2, 3, 4, \dots, 6)$ であるから、 Y の期待値は

$$E(Y) = \sum_{k=2}^6 (8 - k) \frac{1}{35} (k-1)(7-k) \dots \textcircled{2}$$

ともかける。

以上①, ②を辺々加えて、

$$2E(Y) = 8 \underbrace{\sum_{k=2}^6 \frac{1}{35} (k-1)(7-k)}_{\text{全確率}=1} = 8$$

を得るから、

$$E(Y) = 4 \quad \dots(\text{答})$$

3.

(1) $\overrightarrow{CH} = s\overrightarrow{CB} + t\overrightarrow{CD}$ ($s, t \in R$) と一意的に書ける。

このとき

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CA} + s\overrightarrow{CB} + t\overrightarrow{CD}$$

である。

今、条件より

$$\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 & \dots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。ここで

$$\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \cos \alpha \\ |\overrightarrow{CA}|^2 = |\overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2 = 1 \end{cases} \dots \star$$

であるから

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + s|\overrightarrow{CB}|^2 + t\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ &\iff s + \cos \alpha \cdot t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

同様に、

$$\textcircled{2} \iff \cos \alpha \cdot s + t = \frac{1}{2}$$

であるから、 $1 + \cos \alpha \neq 0$ より

$$s = t = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$$

以上より

$$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}\overrightarrow{CD} \dots (\text{答})$$

(2) $\triangle AHC$ は直角三角形より、

$$(1) \implies |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AH}|^2 + |\overrightarrow{CH}|^2$$

$$= |\overrightarrow{AH}|^2 + \frac{1}{\{2(1 + \cos \alpha)\}^2} (|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD})$$

$$= |\overrightarrow{AH}|^2 + \frac{2 + 2\cos \alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2} \quad (\star \text{より})$$

となるので

$$|\overrightarrow{AH}|^2 = 1 - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 + 2\cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}$$

ここで、 $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ より上式の値は正で

$$|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}} \dots (\text{答})$$

(3) $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}\overrightarrow{CD}$ である。

一方、 H が $\triangle BCD$ の重心であるとき

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \text{ である。}$$

$\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$ は一次独立であるから、係数比較により条件は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} &= \frac{1}{3} \iff \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ &\iff \alpha = 60^\circ \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

4.

$$(1) E: y \geq x^2 - 3ax + 2a^2 \iff y \geq (x-a)(x-2a)$$

である。よって

(i) $a \leq 0$ のとき、そもそも $x > 0$ の範囲で、 E は $y \leq 0$ と共有点を持たないので、 D との共有点もない。

(ii) $a > 0$ のとき、 E の中で、 $y \leq 0$ である x の範囲は $a \leq x \leq 2a$ である。従って、

・ $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき、 $2a < 1$ より、 D との共有点はない。

・ $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき、 $a \leq 1 < 2a < 2$ より、 D とは $1 \leq x \leq 2a$ の範囲で共有点を持つ。

・ $1 \leq a \leq 2$ のとき、 $1 \leq a < 2 < 2a$ より、 D とは $a \leq x \leq 2$ の範囲で共有点を持つ。

・ $2 < a$ のとき、 D との共有点はない。

以上の議論から、 E と D が共有点を持つのは

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 2 \quad \dots(\text{答})$$

のとき。

(2) (1)での議論から、

・ $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^{2a} -(x^2 - 3ax + 2a^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_1^{2a} \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

・ $1 \leq a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^2 -(x^2 - 3ax + 2a^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_a^2 \\ &= \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) ・ $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき、この間で

$$S'(a) = -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -(2a-1)\left(a-\frac{3}{2}\right) \geq 0$$

より、 $S(a)$ は単調増加 ...①

・ $1 \leq a \leq 2$ のとき、この間で

$$S'(a) = \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6 = \frac{1}{2}(a-2)(5a-6)$$

より

$$1 < a < \frac{6}{5} \text{ で } S'(a) > 0 \rightarrow S(a) \text{ は単調増加}$$

$$\frac{6}{5} < a < 2 \text{ で } S'(a) < 0 \rightarrow S(a) \text{ は単調減少}$$

...②

以上①, ②より

$$S\left(\frac{1}{2}\right) \nearrow S(1) \nearrow S\left(\frac{6}{5}\right) \searrow S(2)$$

という増減がわかるので、求める最大値は

$$S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{16}{75} \dots(\text{答})$$