

①

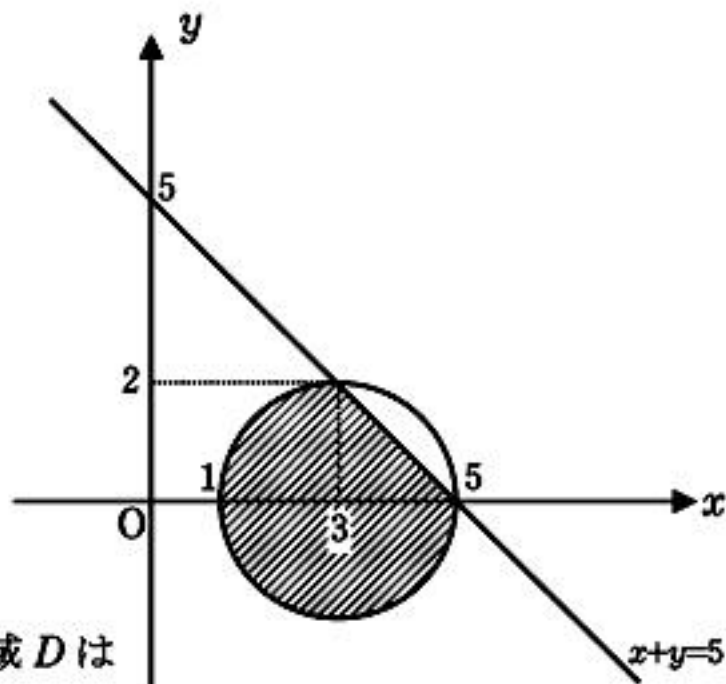
$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0 & \dots ① \\ x + y \leq 5 & \dots ② \end{cases}$$

について、

$$\begin{aligned} ① &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 \leq 4 \end{aligned}$$

からこれは点(3,0)中心、半径2の円の周および内部を表す領域である。

②は直線 $x+y=5$ に関して、原点を含む側の領域($x+y=5$ を含む)となるので、求める領域 D は右図の斜線部分(境界を含む)となる。



そこで、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-1)^2 &= 1 \quad \dots ③ \end{aligned}$$

は点($a,1$)中心、半径1の円周の方程式であり、これが領域 D と交点をもつ範囲を調べる。

③が右図の(i)(ii)の状態を考えると、

(i) ①の境界の円と③が接するときであり、条件は中心間の距離=半径の和となることであるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-3)^2 + 1^2} &= 1+2 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となるが、 $a < 3$ なので $a = 3 - 2\sqrt{2}$ となる。

(ii) 直線 $x+y=5$ と③が接するときであり、条件は③の中心と $x+y=5$ の距離が③の半径と一致することであるから、

$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 1 \Leftrightarrow a = 4 \pm \sqrt{2}$$

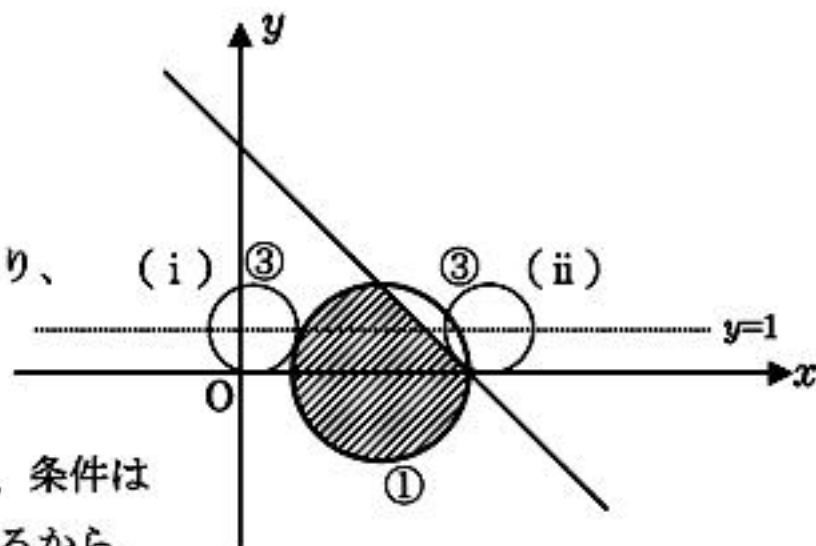
となるが、 $a > 3$ なので $a = 4 + \sqrt{2}$ となる。

このとき、直線 $x+y=5$ と③の接点の x 座標は

$$(x-4-\sqrt{2})^2 + (5-x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2(x-4)^2 - 2\sqrt{2}(x-4) + 1 = 0$$

から $x = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($3 < 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 5$) となり、 D の境界と接している。

以上から、 a の最大値は $4 + \sqrt{2}$ 、最小値は $3 - 2\sqrt{2}$ …答



②

(1) 点 H は平面 P 上にあるので 2 つのベクトル

$\vec{CB}, \vec{CD}$ の和でかける。さらに四面体 ABCD の

対称性により k を定数として

$$\vec{CH} = k(\vec{CB} + \vec{CD})$$

の形でかける。(右図の E は BD の中点)

さらに条件から、

$$|\vec{CA}| = |\vec{CB}| = |\vec{CD}| = 1,$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CD} = \frac{1}{2}, \quad \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}, \quad \vec{CB} \cdot \vec{CD} = \cos \alpha \text{ が成立するので、}$$

$AH \perp$ 平面 P から、

$$AH \perp CB$$

$$\Leftrightarrow \vec{AH} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{CH} - \vec{CA}) \cdot \vec{CB} = 0$$

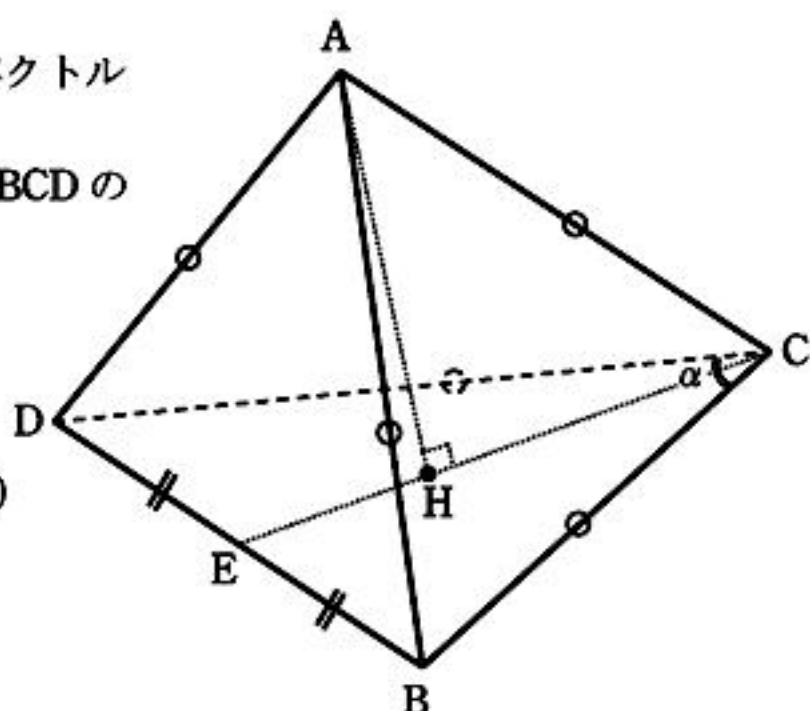
$$\Leftrightarrow (-\vec{CA} + k\vec{CB} + k\vec{CD}) \cdot \vec{CB} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + k + k\cos \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$$

が必要であり、対称性によりこのとき $AH \perp CD$ も成立。よって、

$$\vec{AH} = \vec{CH} - \vec{CA} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}(\vec{CB} + \vec{CD}) - \vec{CA} \quad \dots \text{答}$$



(2) (1)の結果より、

$$\begin{aligned} |\vec{AH}|^2 &= \left| \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} \{ \vec{CB} + \vec{CD} - 2(1 + \cos \alpha) \vec{CA} \} \right|^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} \right\}^2 \left\{ |\vec{CB}|^2 + |\vec{CD}|^2 + 4(1 + \cos \alpha)^2 |\vec{CA}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\vec{CB} \cdot \vec{CD} - 4(1 + \cos \alpha) \vec{CA} \cdot \vec{CB} - 4(1 + \cos \alpha) \vec{CA} \cdot \vec{CD} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} \right\}^2 \left\{ 1 + 1 + 4(1 + \cos \alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \times \cos \alpha - 4(1 + \cos \alpha) \times \frac{1}{2} - 4(1 + \cos \alpha) \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} \right\}^2 \times \{ 4\cos^2 \alpha + 6\cos \alpha + 2 \} \\ &= \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)^2} \times (2\cos \alpha + 1)(\cos \alpha + 1) \\ &= \frac{2\cos \alpha + 1}{2(\cos \alpha + 1)} \end{aligned}$$

となるので、

$$|\vec{AH}| = \sqrt{\frac{2\cos \alpha + 1}{2(\cos \alpha + 1)}} \quad \dots \text{答}$$

(3) 今、3 点 C, H, E は同一直線上にあり、

$$\vec{CE} = l\vec{CH} = \frac{l}{2(1 + \cos \alpha)}(\vec{CB} + \vec{CD})$$

となる実数 l が存在し、E は BD 上にあるので

$$\frac{l}{1 + \cos \alpha} = 1$$

が成立する。よって $l = 1 + \cos \alpha$

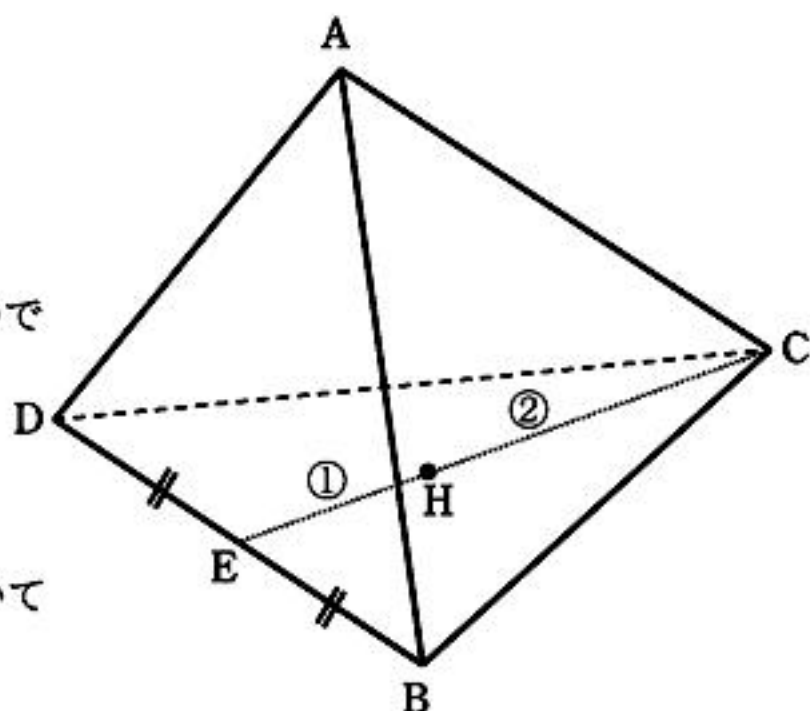
また H が $\triangle BCD$ の重心のとき、右図において

$CH : HE = 2 : 1$ となるので、

$$l = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

から $\alpha = 60^\circ$

…答



③

右図は、当たりくじ ○

はずれくじ ●

とする。

(1) 復元抽出であり、

1回あたりに当たりくじを引く確率は

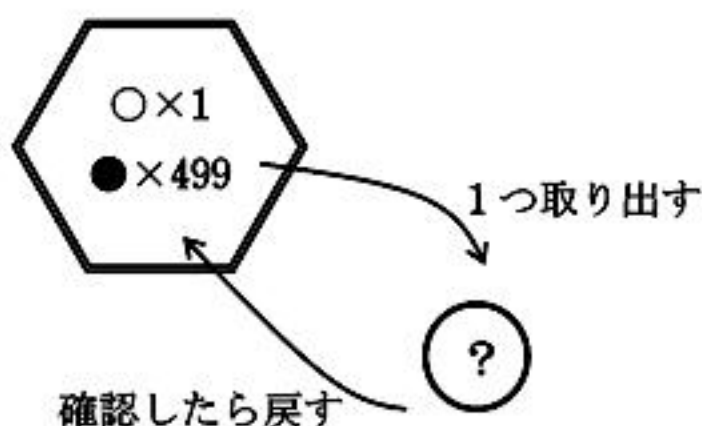
$$\frac{1}{500}$$

なので、1回あたりにもらえる景品の相当額の期待値は、

$$10000 \times \frac{1}{500} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{500}\right) = 20 \text{ (円)}$$

となるので10回では

$$20 \times 10 = 200 \text{ (円)} \quad \dots \text{答}$$



(2) 当たりくじを引く確率を $p = \frac{1}{500} = 0.002$ とおく。

1回のじゃんけんで、その当たり外れが一致するのは、

2人ともあたり、2人ともはずれのいずれかであるので、その確率は

$$p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

となり、それが4回連続で起こる確率は、

$$(2p^2 - 2p + 1)^4$$

となる。 $\frac{1}{2}p = t = 0.001$ においてこれを一部展開して、

$$\begin{aligned} (2p^2 - 2p + 1)^4 &= (1 + 8t^2 - 4t)^4 \\ &= \underbrace{1 + 4(8t^2 - 4t)}_{\text{②}} + \underbrace{6(8t^2 - 4t)^2 + 4(8t^2 - 4t)^3 + (8t^2 - 4t)^4}_{\text{①}} \end{aligned}$$

について、

$$8t^2 - 4t = 8(0.001)^2 - 4(0.001) = -0.003992$$

であるので、

$$\text{②の部分} \quad 1 + 4(8t^2 - 4t) = 1 + 4 \times (-0.003992) = 0.984032$$

①の部分は $-0.004 < 8t^2 - 4t < -0.003$ が成立することを利用して評価すると、符号に注意して、

$$\begin{aligned} 4(-0.01)^3 &< 4(-0.004)^3 < 4(-0.003992)^3 < \text{①} \\ &< 6(-0.003992)^2 + (-0.003992)^4 < 7(-0.004)^2 \end{aligned}$$

となるので、

$$0.984032 - 0.000004 < \text{①} + \text{②} < 0.984032 + 0.000112$$

$$\Leftrightarrow 0.984028 < \text{①} + \text{②} < 0.984144$$

となる。よって求める確率は、0.98 …答

(3) n 枚のくじを発行し、 n 回の抽選が行われるときを考える。

1回の抽選における景品代の期待金額は(1)から20円なので、

$$\text{くじの経費は、} 30 \text{ 万円} + \text{景品代} = 300000 + 20n \text{ (円)}$$

となる。

またこのとき、くじ管理組合に搬出された手数料は $35n$ (円)なので、

これでくじの経費がまかなえるためには、

$$35n \geq 300000 + 20n$$

が成立すればよく、つまり

$$n \geq 20000$$

であればよい。

1000円につき1枚のくじを発行することから、商品の売り上げ目標は

$$1000 \times 20000 = 20000000 \text{ 円以上、}$$

つまり、

$$2000 \text{ 万円以上}$$

とすればよい。

…答

④

$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x} (x > 0)$ について、

$$\begin{aligned} (1) \quad f'(x) &= 1 \times \sin \frac{\pi}{x} + x \times \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) \cos \frac{\pi}{x} \\ &= \sin \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x} \end{aligned}$$

の計算から、

$$f'(2) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 \quad \dots \text{答}$$

また、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) \cos \frac{\pi}{x} - \pi \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{\pi}{x} + \pi \frac{1}{x} \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) \sin \frac{\pi}{x} \\ &= -\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x} - \frac{\pi^2}{x^3} \sin \frac{\pi}{x} \\ &= -\frac{\pi^2}{x^3} \sin \frac{\pi}{x} \end{aligned}$$

について、 $x > 2$ では $0 < \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \frac{\pi}{x} > 0$ となるので $f''(x) < 0$ である。

よって関数 $f'(x)$ は単調減少関数であり、 $f'(2) = 1$ とで

$x > 2$ において $f'(x) < 1$ である。

…証明終り

(2) k が自然数のとき、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{k}\right) &= \sin(k\pi) - k\pi \cos(k\pi) \\ &= 0 - k\pi(-1)^k \\ &= k\pi(-1)^{k+1} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

(3) $g(x) = f'(x) - 1$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= f''(x) \\ &= -\frac{\pi^2}{x^3} \sin \frac{\pi}{x} \end{aligned}$$

となり、

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{x} = k\pi (k \text{ は整数})$$

から $x > 0$ において $x = \frac{1}{k} (k \geq 1)$ のとき $g'(x) = 0$ となり、

さらに(2)の結果を利用することで、

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{k+1}\right) &= f'\left(\frac{1}{k+1}\right) - 1 = (k+1)\pi(-1)^{k+2} - 1 = \begin{cases} > 0 (k \text{ は偶数}) \\ < 0 (k \text{ は奇数}) \end{cases} \\ g'\left(\frac{1}{k}\right) &= f'\left(\frac{1}{k}\right) - 1 = k\pi(-1)^{k+1} - 1 = \begin{cases} < 0 (k \text{ は偶数}) \\ > 0 (k \text{ は奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

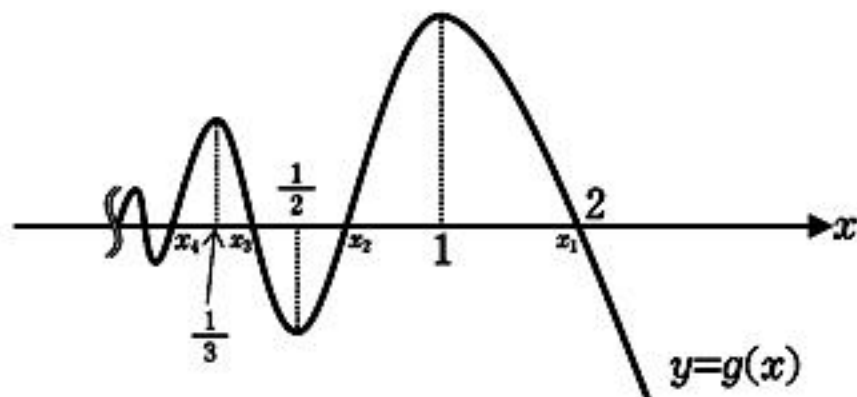
から $g'\left(\frac{1}{k+1}\right)g'\left(\frac{1}{k}\right) < 0$ が常に成立。

また、区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k} \Leftrightarrow k\pi < \frac{\pi}{x} < (k+1)\pi$ において $\sin \frac{\pi}{x}$ の符号は一定であるので、 $g'(x)$ の符号も一定である。

以上を総合することで、

$g(x) = 0$ を満たす x が、各区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k} (k = 1, 2, 3, \dots)$ に 1 つずつ存在することが分かる。また、

$$\begin{aligned} 1 < x < 2 \text{ において } g'(x) &< 0 \\ g(1) &= f'(1) - 1 = \pi > 0 \\ g(2) &= f'(2) - 1 = 1 - 1 = 0 \\ x > 2 \text{ で } g(x) &= f'(x) - 1 < 0 \end{aligned}$$



から $g(x) = 0$ は $1 < x < 2$ に解をもたず、 $x = 2$ を解にもち、 $x > 2$ を満たす解をもたない。以上より、

$$x_1 = 2, \quad \frac{1}{2} < x_2 < 1, \quad \frac{1}{3} < x_3 < \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}, \quad \dots$$

となり、 $n \geq 2$ である自然数 n に対して $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$ となる。…証明終り

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0$ なので(3)の結果より

はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x}$$

となる。

そこで、常に $-x < x \sin \frac{\pi}{x} < x$ の関係があることから、

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

よりはさみうちの原理から $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0$ となる。以上より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \quad \dots \text{答}$$

⑤

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ について、}$$

$$(1) \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ から、}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{と計算できる。以下、} (A+B)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (k \geq 2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となることを数学的帰納法で示す。

$k=l (l \geq 2)$ のとき、

$$(A+B)^l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立すると仮定する。 $(l=2)$ のときはすでに確認済み)

このとき、

$$\begin{aligned} (A+B)^{l+1} &= (A+B)^l (A+B) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので①は $k=l+1$ でも成立。以上より①の成立は確認できた。

$$\text{よって、} (A+B)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (k \geq 2) \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ について、}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から帰納的に $A^m = A (m \geq 1)$ が成立。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ について、}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から帰納的に $B^n = O (n \geq 3)$ が成立。

以上より、

$$A^m B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^m B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の計算となり、帰納的に $A^m B^n = O (n \geq 2)$ が成立する。また、

$$B A^m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 A^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の計算となり、帰納的に $B^n A^m = O (n \geq 2)$ が成立する。

以上から、

$$A^m B^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (m \geq 1, n=1) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (m \geq 1, n \geq 2) \end{cases}, \quad B^n A^m = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (m \geq 1, n=1) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (m \geq 1, n \geq 2) \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

$$(3) \quad (A+B)X = O \text{ から、}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$y_1 = y_2 = y_3 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

となる。

またこのとき $X(A+B) = O$ から

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$x_1 = x_2 = 0$$

となる。以上より x_3 を任意の実数として、

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{答}$$

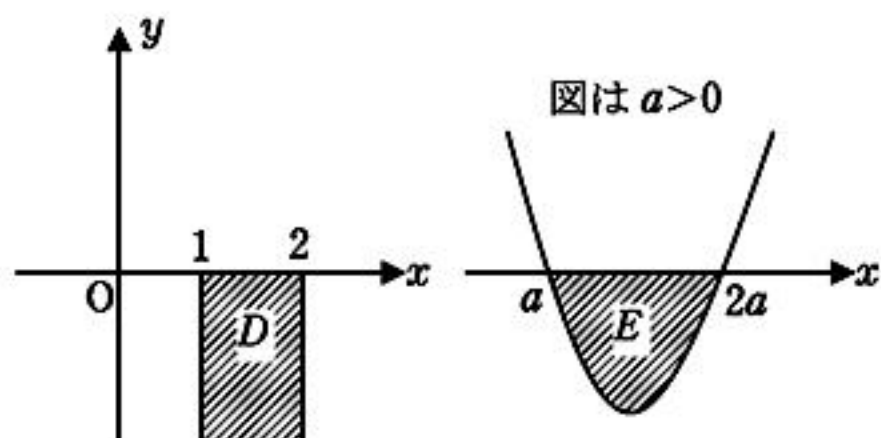
⑥

$$y = x^2 - 3ax + 2a^2 = (x-a)(x-2a)$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 - \frac{1}{4}a^2$$

の計算から、領域 D 、領域 E はそれぞれ
右図の斜線部分(境界を含む)となる。

$f(x) = x^2 - 3ax + 2a^2$ とおく。



(1) D と E が共有点を持つための条件を考える。 D と $y = f(x)$ が交点をもてばよいので、

(i) $\frac{3}{2}a < 1$ のとき、

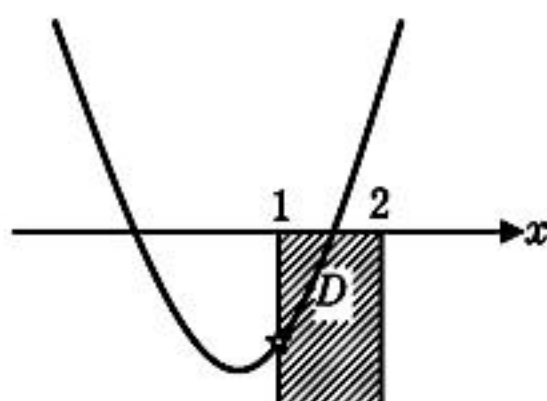
$$f(1) \leq 0$$

であればよく、

$$1 - 3a + 2a^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2a-1)(a-1) \leq 0$$

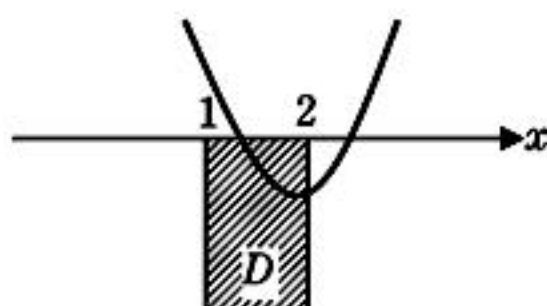
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

から $a < \frac{2}{3}$ とで、 $\frac{1}{2} \leq a < \frac{2}{3}$



(ii) $1 \leq \frac{3}{2}a \leq 2$ のとき、 D と E は

必ず共有点を持つ。よって、 $\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{4}{3}$



(iii) $2 < \frac{3}{2}a$ のとき、

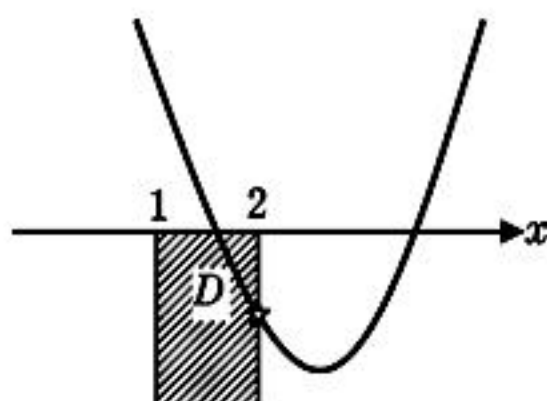
$$f(2) \leq 0$$

であればよく、

$$4 - 6a + 2a^2 \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq a \leq 2$$

から $\frac{4}{3} < a$ とで、 $\frac{4}{3} < a \leq 2$



以上(i)(ii)(iii)から、 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ …答

※「共有点を持たない条件」を考えてもよいが、(2)の問題があることから
ストレートに考えた。

(2) (1)の計算を流用し、 $1, 2, a, 2a$ の位置関係に注意して場合わけする。

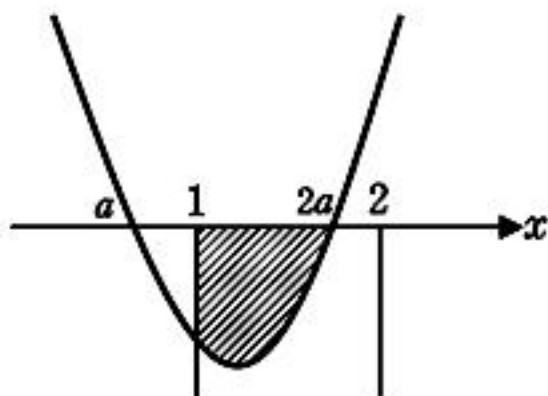
(i) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき、

右のような共通部分となるので、
求める面積は、

$$S(a) = \int_1^{2a} \{0 - (x^2 - 3ax + 2a^2)\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_1^{2a}$$

$$= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} \quad \dots \text{答}$$



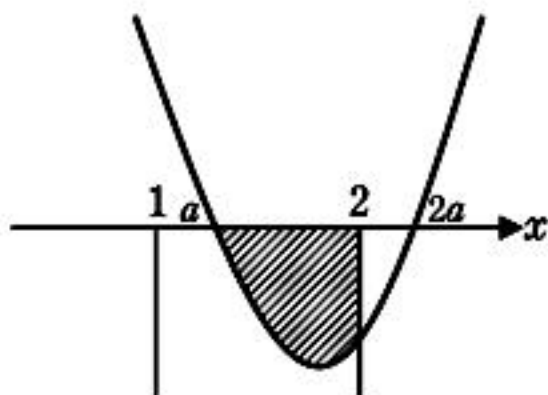
(ii) $1 \leq a \leq 2$ のとき、

右のような共通部分となるので、
求める面積は、

$$S(a) = \int_a^2 \{0 - (x^2 - 3ax + 2a^2)\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_a^2$$

$$= \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3} \quad \dots \text{答}$$



(3) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき、 $S'(a) = -2\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a - \frac{3}{2}\right)$

$1 \leq a \leq 2$ のとき、 $S'(a) = \frac{5}{2}(a-2)\left(a - \frac{6}{5}\right)$

から関数 $S(a)$ の増減は下の通り。

a	$\frac{1}{2}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{6}{5}$	$\dots$	2
$S'(a)$	0	+	+	+	0	-	0
$S(a)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、 $S(a)$ は $a = \frac{6}{5}$ のとき最大となり、その値は

$$S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{5}{6}\left(\frac{6}{5}\right)^3 - 4\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 6 \times \frac{6}{5} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{16}{75} \quad \dots \text{答}$$