

$$(1) \quad x^2 \div (x^2 - 6x - 12) = 1 \cdots (6x + 12),$$

つまり $x^2 = (x^2 - 6x - 12) \times 1 + (6x + 12)$ なので,

$$\begin{cases} a_2 = 6 \\ b_2 = 12 \end{cases} \quad \dots\dots \quad \text{[答]}$$

(2) x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った商を $Q_n(x)$ とおくと,

$$\begin{cases} x^n = (x^2 - 6x - 12)Q_n(x) + (a_n x + b_n) \\ x^{n+1} = (x^2 - 6x - 12)Q_{n+1}(x) + (a_{n+1} x + b_{n+1}) \end{cases}$$

上の式を下の式に代入すると,

$$\begin{aligned} x\{(x^2 - 6x - 12)Q_n(x) + (a_n x + b_n)\} &= (x^2 - 6x - 12)Q_{n+1}(x) + (a_{n+1} x + b_{n+1}) \\ \iff (x^2 - 6x - 12)(xQ_n(x) + a_n) + (6a_n + b_n)x + 12a_n \\ &= (x^2 - 6x - 12)Q_{n+1}(x) + (a_{n+1} x + b_{n+1}) \end{aligned}$$

商と余りの一意性より,

$$\begin{aligned} xQ_n(x) + a_n &= Q_{n+1}(x) \\ (6a_n + b_n)x + 12a_n &= a_{n+1}x + b_{n+1} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = 12a_n \end{cases} \quad \dots\dots \quad \text{[答]}$$

(3) a_n と b_n の最大公約数を d_n とおくと, 示すべきことは d_n の素因数が 2 と 3 のみであることである.

$a_2 = 6, b_2 = 12$ より $d_2 = 6$ なので, $n = 2$ のときは, 成り立つ.

$a_n = d_n a'_n, b_n = d_n b'_n$ (a'_n, b'_n は互いに素) とおける. 漸化式より

$$\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n + b_n = d_n(6a'_n + b'_n) \\ b_{n+1} = 12a_n = d_n(12a'_n) \end{cases}$$

$12a'_n$ と $6a'_n + b'_n$ の最大公約数を d'_n とおく. a'_n と $6a'_n + b'_n$ は互いに素なので, d'_n は 12 と $6a'_n + b'_n$ の最大公約数に等しい.

したがって, d'_n の素因数分解に現われる素数は 12 の素因数分解に現われる $\{2, 3\}$ の部分集合となる.

$d_{n+1} = d'_n d_n$ なので, 帰納的に

$$d_n = d'_{n-1} \times \cdots \times d'_4 d'_3 d'_2 d_2 = 6d'_{n-1} \times \cdots \times d'_4 d'_3 d'_2$$

である. よって, d_n の素因数は 2 と 3 のみである.

したがって a_n と b_n の公約数で素数となるものは, 2, 3. $\dots\dots$ [答]

(1) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{DC}{CA} = \frac{3}{4}$ である. 倍角公式より,

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

$AC = 7t$, $CB = 24t$ とおくと, 三平方の定理より, 斜辺の長さは,
 $BA = \sqrt{(7t)^2 + (24t)^2} = 25t$ である.

正弦の定義より

$$\sin \theta = \frac{24}{25} \quad \dots\dots \text{[答]}$$

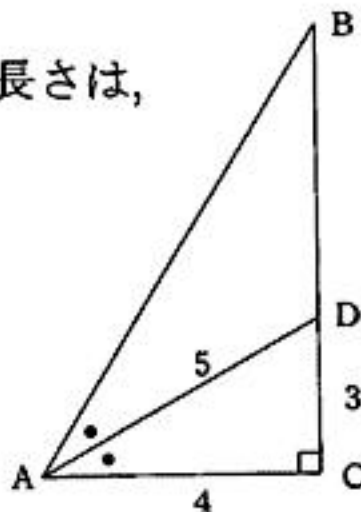
(2)

$$\begin{aligned} \tan \frac{5}{12}\pi &= \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3} = 3.7\dots \end{aligned}$$

一方, $\tan \theta = \frac{24}{7} = 3.4\dots$ なので, $\tan \theta < \tan \frac{5}{12}\pi$

$0 \leq u < \frac{\pi}{2}$ の範囲で, $\tan u$ は単調増加なので, $\theta < \tan \frac{5}{12}\pi$ ■

注意 (1) の誘導にのって $\sin \theta$ を用いると, 計算はもう少し大変になる.



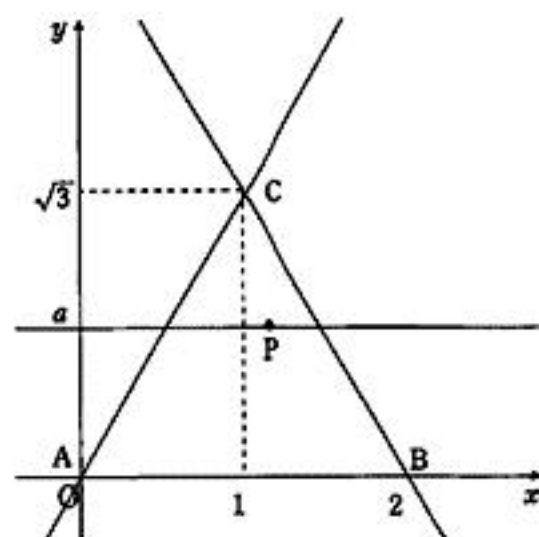
3

(1) 直線 AC の式は $y = \sqrt{3}x$,
 直線 BC の式は $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ なので,
 直線 $y = a$ との交点は,

$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\right), \left(2 - \frac{a}{\sqrt{3}}, a\right)$ である.

したがって,

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2 - \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$



注意 「 $\triangle ABC$ 」は、内部だけでなく周も含むと考えて解いた.

(2) $P(x, a)$ とおくと,

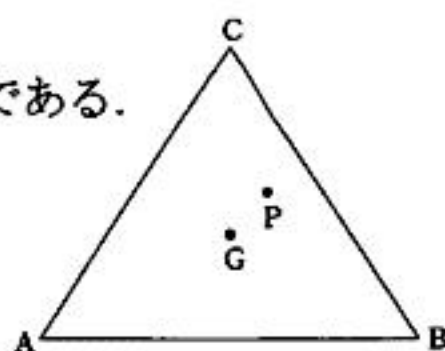
$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= (x^2 + a^2) + \{(x-2)^2 + a^2\} + \{(x-1)^2 + (a-\sqrt{3})^2\} \\ &= 3x^2 + 3a^2 - 6x - 2\sqrt{3}a + 8 \\ &= 3(x-1)^2 + 3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5 \end{aligned}$$

よって, $x=1$ のとき最小値 $3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5$ を取る. $\dots\dots \text{〔答〕}$

(3) 上で求めた最小値 $3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5$ を平方完成すると, $3\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4$
 である. ゆえに $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値 4 となる. よって, 最小値は 4, P の
 座標は $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\dots\dots \text{〔答〕}$

別解 以下のようにベクトルの設定で出題するのが普通である.

重心を G とおくと, $G\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$



$$\begin{aligned} |\vec{AP}|^2 + |\vec{BP}|^2 + |\vec{CP}|^2 &= |\vec{GP} - \vec{GA}|^2 + |\vec{GP} - \vec{GB}|^2 + |\vec{GP} - \vec{GC}|^2 \\ &= 3|\vec{GP}|^2 - 2(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) \cdot \vec{GP} + |\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2 \end{aligned}$$

ここで, 重心の公式より $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{GG} = \vec{0}$

また, $|\vec{GA}|, |\vec{GB}|, |\vec{GC}|$ は3つとも $\frac{2}{\sqrt{3}}$

これらを上のに代入すると,

$$|\vec{AP}|^2 + |\vec{BP}|^2 + |\vec{CP}|^2 = 3|\vec{GP}|^2 + 4$$

となるので, $P=G$ のとき, この値は最小値 4 となる. $\dots\dots \text{〔答〕}$

$a = \int_0^2 |f(t)| dt$ とおくと, $f(x) = x^2 - xa$ となる. よって, 与式は,

$$a = \int_0^2 |t^2 - at| dt \text{ となる.}$$

右辺が 0 以上であることに注意すると, 次の 2通りの可能性が考えられる.

(i) $0 \leq a < 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a &= \int_0^a (at - t^2) dt + \int_a^2 (t^2 - at) dt \\ &= \left[\frac{at^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^a + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{at^2}{2} \right]_a^2 \\ &= \frac{a^3}{6} + \left\{ \left(\frac{8}{3} - 2a \right) - \left(-\frac{a^3}{6} \right) \right\} \\ &= \frac{a^3}{3} - 2a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

これを整理して,

$$\begin{aligned} a^3 - 9a + 8 &= 0 \iff (a-1)(a^2 + a - 8) = 0 \\ &\iff a = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

この 3つのうち $0 < a < 2$ に入るものは, $a = 1$

(ii) $2 \leq a$ のとき,

$$a = \int_0^2 (at - t^2) dt = \left[\frac{at^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = 2a - \frac{8}{3}$$

この 1 次方程式を解いて, $a = \frac{8}{3}$

(i), (ii) より $a = 1, \frac{8}{3} \dots\dots$ [答]