

(1)

$n \geq 2$, x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割ったときの商を $Q_n(x)$, 余りを $a_n x + b_n$ とすると

$$x^n = (x^2 - 6x - 12)Q_n(x) + a_n x + b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。よって,

$$x^2 = (x^2 - 6x - 12) \times 1 + 6x + 12$$

と変形することで, ①から

$$a_2 = 6, b_2 = 12$$

となる。

(答) $a_2 = 6, b_2 = 12$

(2)

①の両辺に x をかけて,

$$x^{n+1} = (x^2 - 6x - 12)xQ_n(x) + a_n x^2 + b_n x \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。また,

$$a_n x^2 + b_n x = a_n (x^2 - 6x - 12) + (6a_n + b_n)x + 12a_n$$

から, ②は,

$$x^{n+1} = (x^2 - 6x - 12)(xQ_n(x) + a_n) + (6a_n + b_n)x + 12a_n$$

となるので, 間の設定から

$$\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = 12a_n \end{cases}$$

と求まる。

(答) $\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = 12a_n \end{cases}$

(3)

(1), (2)の結果より,

$$\begin{cases} a_2 = 6 = 2 \times 3 \\ b_2 = 12 = 2^2 \times 3 \end{cases}, \begin{cases} a_3 = 48 = 2^4 \times 3 \\ b_3 = 72 = 2^3 \times 3^2 \end{cases}, \begin{cases} a_4 = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \\ b_4 = 576 = 2^6 \times 3^2 \end{cases}, \dots$$

となることから, a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみであると推測される。以下, その事実を証明する。

今, a_{k+1}, b_{k+1} が 5 以上の素数 p を共通な素因数として含むと仮定する。このとき,

$$a_{k+1} = ps, b_{k+1} = pt$$

を満たす整数 s, t が存在する (s, t は k に依存する)。このとき, (2)の結果で $n = k$ とすることで

$$\begin{cases} ps = 6a_k + b_k \\ pt = 12a_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_k = p(2s - t) \\ 12a_k = pt \end{cases}$$

が成立し, p と 2, p と 12 は互いに素なので a_k, b_k とともに p の倍数となる。しかし, これをくり返すと a_2, b_2 も共に p の倍数となり, 矛盾が起こる。

逆に, $a_2 = 6, b_2 = 12$ は 2, 3 を共通な素因数として含み, さらに (2)の結果より

$$\begin{cases} a_{k+1} = 6a_k + b_k \\ b_{k+1} = 12a_k \end{cases}$$

であるから, a_k, b_k が 2, 3 を共通な素因数として含むとき, a_{k+1}, b_{k+1} は 2, 3 を共通な素因数として含む。

以上から求める素数は 2 と 3 のみである。

(答) 2, 3

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{AC}{AD} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

(答) $\sin \theta = \frac{24}{25}$

(2)

$\sin \theta$ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において増加関数なので、この区間において

$$\theta < \frac{5}{12}\pi \Leftrightarrow \sin \theta < \sin \frac{5}{12}\pi \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{5}{12} \pi &= \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \\&= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \\&> \frac{1.41(1+1.73)}{4} \\&= 0.962325 \\&> 0.96 \\&= \frac{24}{25}\end{aligned}$$

(証明終)

(1)

n は自然数, $\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$ について

$$f(x) = \frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e}$$

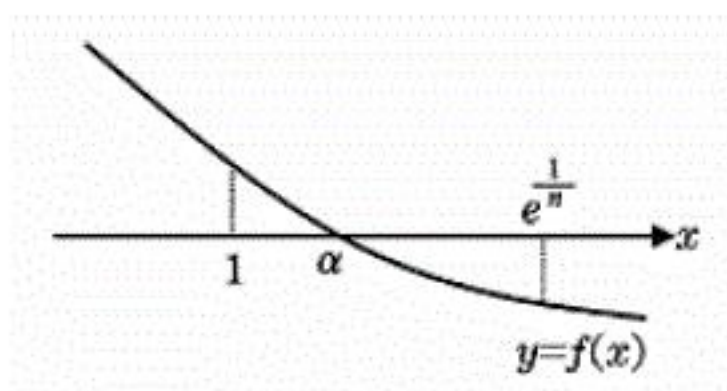
を考える。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{n}{x^{n+1}} - \frac{1}{x} \\ &= -\frac{n+x^n}{x^{n+1}} < 0 \quad (x \geq 1) \end{aligned}$$

より, 関数 $f(x)$ は $x \geq 1$ で単調減少関数である。また,

$$f(1) = \frac{1}{1^n} - \log 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} - \log e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{e} \\ &= \frac{1}{e} - \frac{1}{n} - \frac{1}{e} \\ &= -\frac{1}{n} < 0 \end{aligned}$$



および関数 $f(x)$ が $x \geq 1$ で連続であることから, 中間値の定理により

$$1 < \alpha < e^{\frac{1}{n}}, f(\alpha) = 0$$

を満たす α がただ1つ存在し, 題意が証明された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より

$$1 < x_n < e^{\frac{1}{n}}$$

が成立する。また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

とで, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

が成立する。

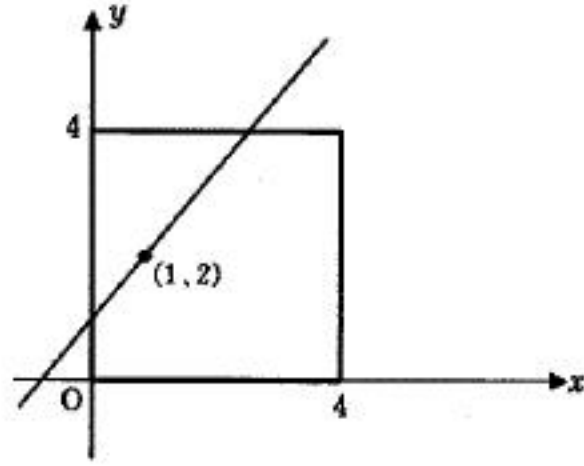
(証明終)

(1)

点(1, 2)を通る直線のうち直線 $x=1$ について、その K に含まれる部分 l の長さは4である。また、点(1, 2)を通る直線で傾きが m のものを考えると、その方程式は

$$y = m(x-1) + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とかけろ。



図形の対称性から、 l の長さの値域を調べるのに

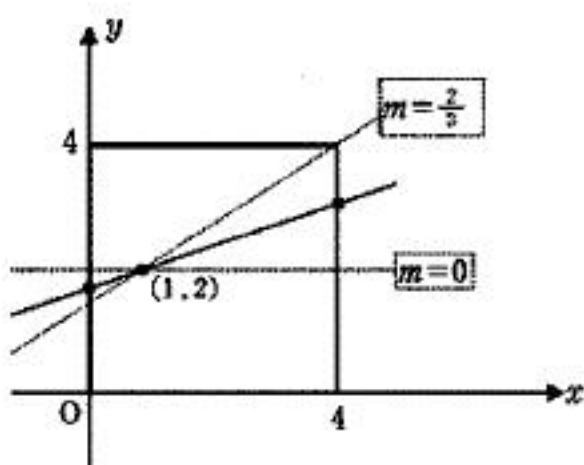
$$m \geq 0$$

で考えれば十分である。また、 $m > 0$ のとき①と x 軸、 y 軸、 $x=4$ 、 $y=4$ との交点はそれぞれ

$$\left(1 - \frac{2}{m}, 0\right), (0, 2-m), (4, 3m+2), \left(1 + \frac{2}{m}, 4\right)$$

となる。 l の長さの最大値について、

(i) $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$ のとき、



$$l^2 = (4-0)^2 + \{3m+2-(2-m)\}^2 \\ = 16(1+m^2)$$

より、これは $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$ において m の増加関数なので

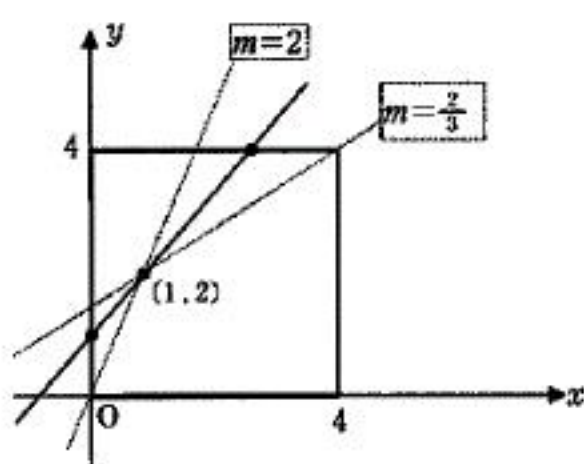
$$16(1+0^2) \leq l^2 \leq 16\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} \Leftrightarrow 16 \leq l^2 \leq 23 + \frac{1}{9}$$

となり、 $l > 0$ なので、 l の値域は

$$4 \leq l \leq \sqrt{23 + \frac{1}{9}}$$

であることがわかる。

(ii) $\frac{2}{3} \leq m \leq 2$ のとき、



$$l^2 = \left(1 + \frac{2}{m}\right)^2 + \{4 - (2-m)\}^2 \\ = m^2 + 4m + 5 + \frac{4}{m} + \frac{4}{m^2}$$

となる。そこで

$$f(m) = m^2 + 4m + 5 + \frac{4}{m} + \frac{4}{m^2}$$

とおくと、

$$f'(m) = 2m + 4 - \frac{4}{m^2} - \frac{8}{m^3} = \frac{2(m^3 - 2)(m + 2)}{m^3}$$

から

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -2, 2^{\frac{1}{3}}$$

となるので、増減表は下のようになる。

m	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$2^{\frac{1}{3}}$	$\cdots$	2
$f'(m)$		-	0	+	
$f(m)$		$\searrow$		$\nearrow$	

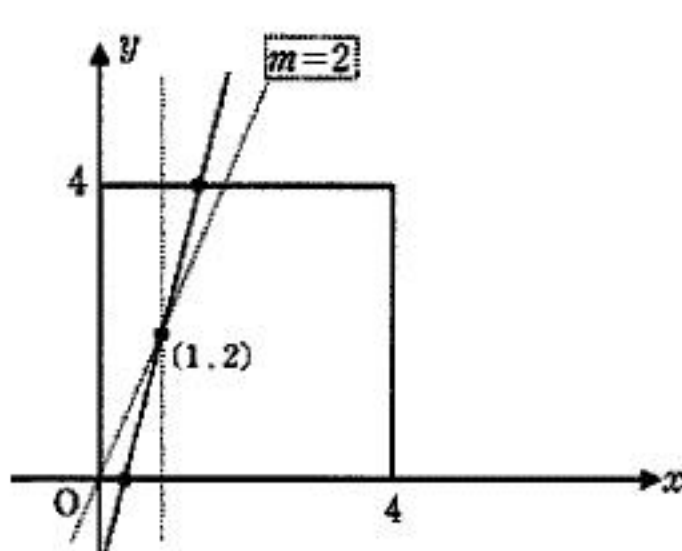
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 23 + \frac{1}{9}, f(2) = 20, f\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = 3\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}\right) + 5$$

から、 $l > 0$ とて l の値域は

$$\sqrt{3\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}\right) + 5} \leq l \leq \sqrt{23 + \frac{1}{9}}$$

であることがわかる。

(iii) $2 \leq m$ のとき、



$$l^2 = \left\{1 + \frac{2}{m} - \left(1 - \frac{2}{m}\right)\right\}^2 + (4-0)^2 \\ = 16\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$$

より、これは $m \geq 2$ において減少関数なので

$$16(1+0) < l^2 \leq 16\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \Leftrightarrow 16 < l^2 \leq 20$$

となり、 $l > 0$ なので、 l の値域は

$$4 < l \leq \sqrt{20}$$

であることがわかる。

以上を総合すると、 l の最大値は $\sqrt{23 + \frac{1}{9}} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$ となる。

これは(i)(ii)共通で $m = \frac{2}{3}$ のときであるので、求める直線の方程式は、

$$y = \frac{2}{3}(x-1) + 2 = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

と、さらに図形の対称性から、 $y=2$ に関して対称な直線

$$y = -\frac{2}{3}(x-1) + 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

である。

(答) l の最大値： $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ ，直線の方程式： $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ ， $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

(2)

(1)での計算により、 $\sqrt{3\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}\right) + 5}$ と4のうち小さいほうが最小値である。ここで、

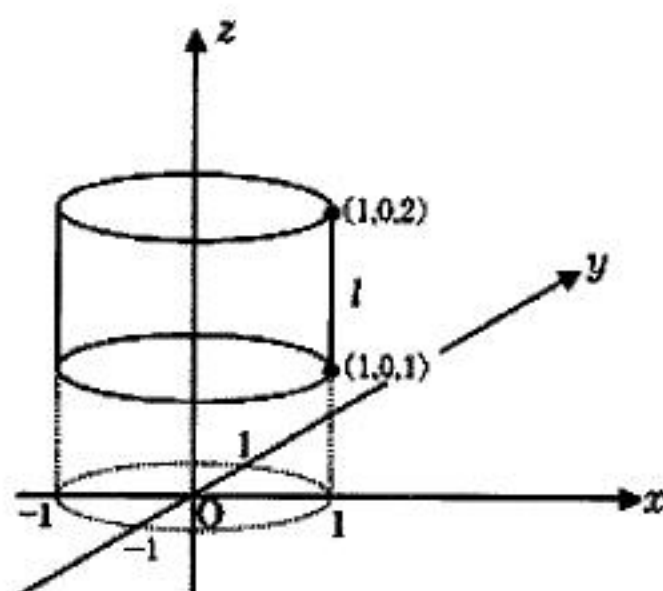
$128 > 125$ から $2 > \frac{125}{64}$ より $2^{\frac{1}{3}} > \frac{5}{4}$ が成立する。これを利用することで、

$$3\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}\right) = 3\left\{\left(2^{\frac{1}{3}} + 1\right)^2 - 1\right\} > 3\left\{\left(\frac{5}{4} + 1\right)^2 - 1\right\} \\ = \frac{195}{16} > \frac{176}{16} = 11$$

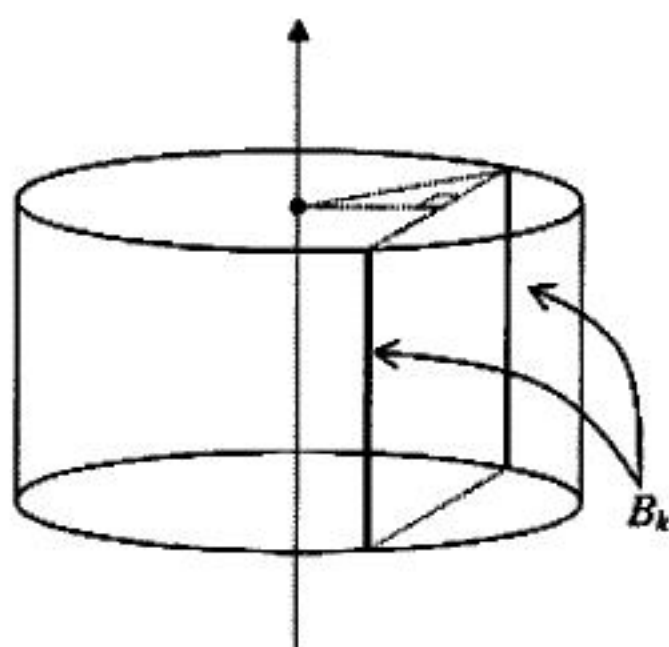
が成立するので、 $\sqrt{3\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}\right) + 5} > 4$ を満たす。以上より、求める最小値は4である。

(答) l の最小値：4

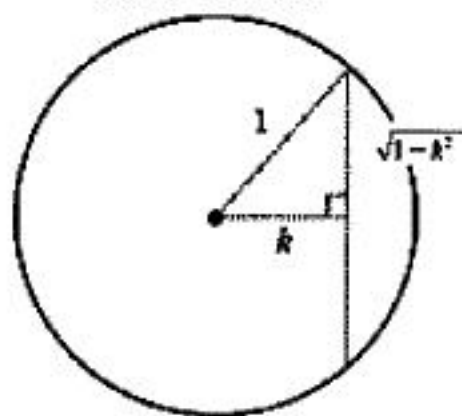
2点 $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$ を結んだ線分 l を z 軸のまわりに一回転してできる図形 A は下図のような円筒形の図形となる。



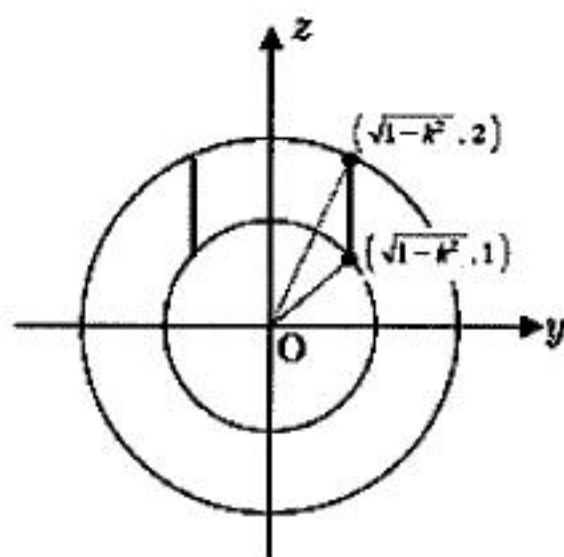
この立体を $x=k$ ($-1 \leq k \leq 1$)で切ったときの切り口(B_k とする)を考える。



真上から見た図



B_k を yz 平面に正射影したグラフを考えると、それを原点に関して一回転させたものが立体 A の $x=k$ での切り口となる。



よって上のグラフより、原点に関して一回転させてできる図形は円板から円板を除いた図形であり、その面積を $S(k)$ とすると、

$$S(k) = \pi \left\{ \left(\sqrt{1-k^2} \right)^2 + 2^2 \right\} - \pi \left\{ \left(\sqrt{1-k^2} \right)^2 + 1^2 \right\} \\ = 3\pi$$

となる。以上から、求める A の体積は

$$2 \int_0^1 S(k) dk = 2 \int_0^1 3\pi dk = 6\pi$$

と求まる。

(1)

$$a > 0, \quad I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} dx, \quad I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned} I_0(a) &= \int_0^a (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3} (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \left\{ (1+a)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left\{ \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left\{ (1+0)^{\frac{3}{2}} - 0 \right\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a) = \frac{2}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_n(a) &= \int_0^a x^n (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[x^n \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a - \int_0^a nx^{n-1} \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3} \int_0^a x^{n-1} (1+x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3} \int_0^a x^{n-1} (1+x) (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3} \left\{ \int_0^a x^{n-1} (1+x)^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^a x^n (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \right\} \end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2n}{3} \right) I_n(a) &= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3} I_{n-1}(a) \\ \Leftrightarrow I_n(a) &= \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a) \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)の漸化式で $n=1$ とすると,

$$I_1(a) = \frac{2}{5} a (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \left\{ (1+a)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}$$

となり,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+1\right)} I_1(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{5} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15a} \left\{ \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \right\} \right\} \\ &= \frac{2}{5} \times 1 - 0 \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

となる。同様に(2)の漸化式で $n=2$ とすると,

$$I_2(a) = \frac{2}{7} a^2 (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} \left(\frac{2}{5} a - \frac{4}{15} \right) (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{105}$$

となり,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+2\right)} I_2(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{7} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7a} \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{15a} \right) \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{105a^{\frac{7}{2}}} \right\} \\ &= \frac{2}{7} \times 1 - 0 - 0 \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

となる。以上と(1)の結果より, $n \geq 1$ のとき

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a) = \frac{2}{3+2n} \quad \cdots (*)$$

と推測できる。以下, これを数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$ のとき

上の計算より, 成立することがわかる。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) のとき(*)の成立を仮定し, $n=k+1$ で(*)の成立を示す(2)の漸化式で $n=k+1$ のときの式を利用して,

$$\begin{aligned} a^{-\left(\frac{3}{2}+k+1\right)} I_{k+1}(a) &= a^{-\left(\frac{3}{2}+k+1\right)} \left\{ \frac{2}{3+2(k+1)} a^{k+1} (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2(k+1)}{3+2(k+1)} I_k(a) \right\} \\ &= \frac{2}{5+2k} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2(k+1)}{5+2k} a^{-1} \times a^{-\left(\frac{3}{2}+k\right)} I_k(a) \end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{5+2k} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2(k+1)}{5+2k} a^{-1} \times a^{-\left(\frac{3}{2}+k\right)} I_k(a) \right\} &= \frac{2}{5+2k} (0+1)^{\frac{3}{2}} - 0 \times \frac{2}{3+2k} \\ &= \frac{2}{3+2(k+1)} \end{aligned}$$

となり, (*)は $n=k+1$ でも成立することが確認できた。以上より, $n \geq 1$ で

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a) = \frac{2}{3+2n}$$

となることが示された。(1)の結果より, これは $n=0$ でも成立することがわかる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a) = \frac{2}{3+2n}$$