

(1) $f(x) = x\{x^2 + 2(a-2)x + (a-2)^2\} = x\{x + (a-2)\}^2$ なので,

$f(x) = 0 \iff x = 0, 2-a$.

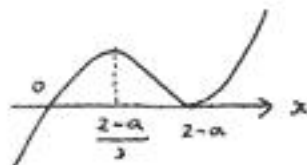
これらが一致してしまうのは、 $a = 2$ のときのみ。よって、

$a < 2, 2 < a$. …… [答]

(2) $f'(x) = x'(x+a-2)^2 + x\{(x+a-2)^2\}' = (x+a-2)^2 + x \times 2(x+a-2)$
 $= \{(x+a-2) + 2x\}(x+a-2) = (3x+a-2)(x+a-2)$ である。

(i) $a < 2$ のとき、増減表は次のようになる。

x	...	$\frac{2-a}{3}$	...	$2-a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}(2-a)^3$	↘	0	↗



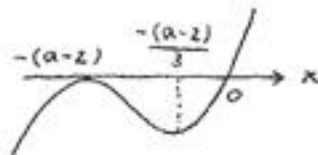
この表より、 $\frac{2-a}{3}$ のとき極大値 $\frac{4}{27}(2-a)^3$ 、
 $x = 2-a$ のとき極小値 0 となる。…… [答]

(ii) $a = 2$ のとき、

$f(x) = x^3$ となり、これは単調増加。よって、極値は存在しない。…… [答]

(iii) $2 < a$ のとき、増減表は次のようになる。

x	...	$-(a-2)$	...	$-\frac{(a-2)}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}(a-2)^3$	↗



この表より、 $-(a-2)$ のとき極大値 0、
 $-\frac{(a-2)}{3}$ のとき極小値 $-\frac{4}{27}(a-2)^3$ となる。…… [答]

(3) 上の (i) より $a < 2$ のとき、極大値を与える点 (X, Y) は
 $(\frac{2-a}{3}, \frac{4}{27}(2-a)^3)$ となる。

a が $a < 2$ の範囲を動くとき、 X は $X > 0$ を動く。 $Y = 4X^3$ である。

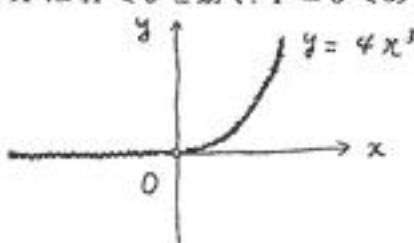
上の (ii) より、 $a = 2$ のとき、極大値を与える点 (X, Y) は存在しない。

上の (iii) より $2 < a$ のとき、極大値を与える点 (X, Y) は

$(-(a-2), 0)$ となる。

a が $2 < a$ の範囲を動くとき、 X は $X < 0$ を動く。 $Y = 0$ である。

(i), (ii), (iii) より



…… [答]

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 \left(\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + e \right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

である。(i) から、これが

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ に等しいので、係数比較して、

$a = e, b = d$. よって、

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ とおける.

(ii) の式に $x = 1$ を代入すると、(iii) 式を用いて、

$f(0) = f(1) = 1$. したがって、

$a = 1$ となり、

$f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1$ とおける.

(ii) の式に $x = 2$ を代入すると、

$$f(-1) = f(2) \iff 1 - b + c - b + 1 = 16 + 8b + 4c + 2b + 1$$

$$\iff 12b + 3c + 15 = 0 \iff 4b + c + 5 = 0.$$

(ii) の式に $x = 3$ を代入すると、

$$f(-2) = f(3) \iff 16 - 8b + 4c - 2b + 1 = 81 + 27b + 9c + 3b + 1$$

$$\iff 40b + 5c + 65 = 0 \iff 8b + c + 13 = 0.$$

この2式より、

$b = -2, c = 3$. 以上より

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ であることが必要. このとき、(iii) は確かに成り立つ. また、

$f(x) = (x^2 - x + 1)^2 = \{1 - x(1 - x)\}^2$ なので、常に (ii) も成り立つ.

以上より、

$a = 1, b = -2, c = 3, d = -2, e = 1$. ……【答】

3

$\triangle OA_1A_2$ に三平方の定理を適用して、

$$A_1A_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$\triangle OA_1A_2$ と $\triangle OA_2A_3$ が相似であり、相似比は $OA_1 : OA_2 = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。よって、

$$A_2A_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} A_1A_2. \text{ 全く同じ理由で、}$$

$$A_{k+1}A_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{3}} A_kA_{k+1} \text{ が成り立つので、}$$

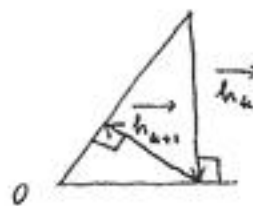
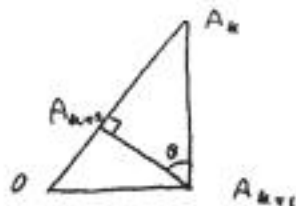
$$A_kA_{k+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1} \times A_1A_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \dots\dots \text{ [答]}$$

(2) $\angle A_2OA_1 = \theta$ とおくと、三角形の相似より、
 $\angle A_{k+2}A_{k+1}A_k = \theta$ となる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{k+1}A_k} \cdot \overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}} &= |\overrightarrow{A_{k+1}A_k}| |\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}| (|\overrightarrow{A_{k+1}A_k}| \cos \theta) \\ &= |\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}| |\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}| = |\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}|^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

ここで、(1) の結果を用いた。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n (-\overrightarrow{A_{k+1}A_k}) \cdot \overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{-2}{9} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= \frac{-1}{3} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}. \dots\dots \text{ [答]} \end{aligned}$$



(1) $x = -6, -5, \dots, 4, 5, 6$ のいずれかにいるとき、

1回の移動で原点に来る確率は $\frac{1}{6}$ 、

1回の移動で原点に来ない確率は $\frac{5}{6}$ である。

よって、1回目は原点でなく、2回目に原点に来る確率は

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \dots\dots\dots \text{【答】}$$

(2) n は自然数であるとして解く。

1回目、2回目は原点でなく、3回目に原点に来る確率は(1)と同じ理由で、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \dots\dots\dots \text{【答】}$$

(3) 1回目の移動で $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のいずれかに来る。

よって、2, 3, $\dots$, $n-1$ 回目の移動では原点に来ず、

n 回目に原点に来る確率は

$n = 1$ のとき 0.

$n \geq 2$ のとき、

$$1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \dots\dots\dots \text{【答】}$$

