

$$(i) \quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad (ii) \quad f(1-x) = f(x) \quad (iii) \quad f(1) = 1$$

$$(1) \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0) \text{ とおくと}$$

(i) について

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= x^4 \left(a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{1}{x} + a_0 \right) \\ &= a_0 x^4 + a_1 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{5-n} + a_n x^{4-n} \end{aligned}$$

となり、この式の次数は4以下。さらにこれが多項式であり、かつ $f(x)$ と一致するには

$$n \leq 4$$

が必要となる。…証明終り

$$(2) \quad (1) \text{の結果より、} f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ とおける。}$$

このとき、(i)の条件より

$$x^4 \left(a \frac{1}{x^4} + b \frac{1}{x^3} + c \frac{1}{x^2} + d \frac{1}{x} + e \right) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\Leftrightarrow ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

これが x についての恒等式となると、

$$e = a, \quad d = b, \quad c \text{ は任意}, \quad b = d, \quad a = e$$

から

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$$

とかける。

次に(ii)の条件より、 $f(1-x) = f(x)$ が x についての恒等式なので

$$\begin{aligned} f(1-x) &= a(1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + b(1-x) + a \\ &= ax^4 - (4a+b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 - (4a+4b+2c)x + 2a+2b+c \end{aligned}$$

これと $f(x)$ の係数を比較して、

$$-(4a+b) = b, \quad 6a+3b+c = c, \quad -(4a+4b+2c) = b, \quad 2a+2b+c = a$$

$$\Leftrightarrow 2a+b=0, \quad 4a+5b+2c=0, \quad a+2b+c=0$$

$$\Leftrightarrow b = -2a, \quad c = 3a$$

から

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + 3ax^2 - 2ax + a$$

とかける。また(iii)の条件より、

$$f(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow a - 2a + 3a - 2a + a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

以上より求める多項式 $f(x)$ は、

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \quad \cdots \text{答え}$$

(1) $\angle A_1OA_2 = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ を満たし、

$$\triangle A_1OA_2 \sim \triangle A_nA_{n+1}A_{n+2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

から $\angle A_nA_{n+1}A_{n+2} = \theta \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ なので

$\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ について

$$|\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}| = |\overrightarrow{A_kA_{k+1}}| \cos \theta$$

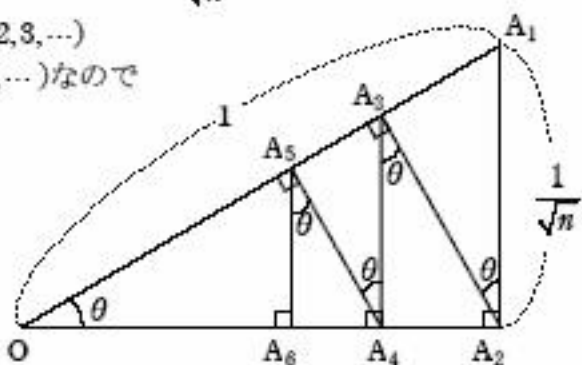
$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

が成立するから、

$$|\vec{h}_k| = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos \theta)^{k-1}$$

とかける。また、 $-\vec{h}_k = \overrightarrow{A_{k+1}A_k}$ と $\vec{h}_{k+1} = \overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$ のなす角は θ なので、

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} &= -(\vec{h}_k) \cdot \vec{h}_{k+1} \\ &= -|\vec{h}_k| |\vec{h}_{k+1}| \cos \theta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}} (\cos \theta)^{k-1} \times \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos \theta)^k \times \cos \theta \\ &= -\frac{1}{n} (\cos \theta)^{2k} \\ &= -\frac{1}{n} (1 - \sin^2 \theta)^k \\ &= -\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2) \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k \right\} \\ &= -\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n}{1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cdot \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{-n} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \right\}^{-1} \\ &= \{ e \cdot (1+0) \}^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

から、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= (-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{e} \right) \\ &= \frac{1}{e} - 1 \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

※(1)は座標設定でもできるが面倒。例えば $O(0,0)$, $A_1 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}, \sqrt{\frac{1}{n}} \right)$, $A_2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}, 0 \right)$

とおくと m を自然数として

$$A_{2m} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{m-1}, 0 \right), \quad A_{2m-1} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{m-1}, \sqrt{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{m-1} \right) \text{ となり、}$$

$$k \text{ が偶数のとき、} \vec{h}_k = \left(-\frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k}{2}-1}, \sqrt{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k}{2}} \right)$$

$$k \text{ が奇数のとき、} \vec{h}_k = \left(0, -\sqrt{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} \right)$$

よって、 k が偶数のとき、

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} &= -\frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k}{2}-1} \times 0 + \sqrt{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k}{2}} \times \left\{ -\sqrt{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k}{2}} \right\} \\ &= -\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k \end{aligned}$$

k が奇数のとき、

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} &= 0 \times \left\{ -\frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} \right\} + \left\{ -\sqrt{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} \right\} \times \sqrt{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{k+1}{2}} \\ &= -\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k \end{aligned}$$

となり k の偶奇によらず一致する。

③

(1) 4点O, A, B, Cにより四面体OABCができる。

このとき、三角形OAB, 三角形OBC, 三角形OCAは全て合同な二等辺三角形であり、余弦定理により

$$\begin{aligned} AB=BC=CA &= \sqrt{1^2+1^2-2 \times 1 \times 1 \times \cos \theta} \\ &= \sqrt{2-2\cos \theta} \end{aligned}$$

となり、三角形ABCは正三角形である。

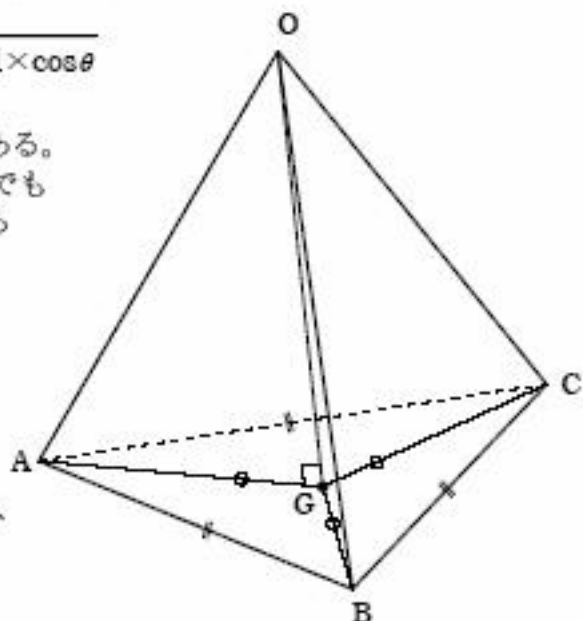
よって、点Gは三角形ABCの外心でもあるので三角形ABCで正弦定理から

$$\begin{aligned} AG &= \frac{AB}{2\sin 60^\circ} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}(1-\cos \theta) \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

となる。

2点O, Gは3点A, B, Cから等距離にあるので $OG \perp ABC$ となり、直角三角形OAGについて

$$\begin{aligned} OG &= \sqrt{OA^2 - AG^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \frac{2}{3}(1-\cos \theta)} \\ &= \sqrt{\frac{1+2\cos \theta}{3}} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$



(2) 四面体OABCの体積をVとすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{の面積}) \times OG \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times (\sqrt{2-2\cos \theta})^2 \times \sin 60^\circ \right) \times \sqrt{\frac{1+2\cos \theta}{3}} \\ &= \frac{1}{6} (1-\cos \theta) \sqrt{1+2\cos \theta} \end{aligned}$$

となり、 $\cos \theta = t$ とおくと $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$ から $-\frac{1}{2} < t < 1$ であり、

$$V = \frac{1}{6} (1-t) \sqrt{1+2t} > 0 \text{ なので } f(t) = (6V)^2 = (1-t)^2 (1+2t) \text{ の最大値を考えると、}$$

$$f'(t) = 6t(t-1)$$

とで $f(t)$ の増減は下のようになる。

t	$(-\frac{1}{2})$	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$f'(t)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(t)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$

よって $f(t)$ は $t=0$ で最大となるので V も $t=0$ で最大となり、

$$\text{最大値は } \frac{1}{6} \sqrt{f(0)} = \frac{1}{6} \quad \cdots \text{答え}$$

④ ルール(1)により、次のことが言える。

点 P の座標を a とする。

- $1 \leq a \leq 6$ のとき、サイコロの目が a であれば $a - a$ つまり 0 に移動し、
サイコロの目が a 以外であれば 0 以外に移動する

$-5 \leq a \leq -1$ のとき、サイコロの目が $|a|$ であれば $|a| + a$ つまり 0 に移動し、
サイコロの目が $|a|$ 以外であれば 0 以外に移動する
- ※1

また、次のことが言える。点 P が a ($1 \leq a \leq 6$) のとき、移動後の点は $-5 \leq b \leq 5$ であり、さらに点 P が a ($-5 \leq a \leq -1$) のとき、移動後の点は $-4 \leq a \leq 5$ である。点 P が 0 に移動すれば点 P は移動できなくなることとで、

- 点 P が 1 以上 6 以下の場所からスタートしたとき、点 P は
何度移動しても -6 以下または 7 以上の点に移動できない。

※2

(1) 点 P が 1 以上 6 以下の点からスタートしたときなので、※1、※2 から
1 回目に 0 以外、2 回目に 0 以外、3 回目に 0 に移動すればよい。よって、

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \quad \cdots \text{答え}$$

(2) (1)と同様に考えると、1 回目から $m - 1$ 回目まで 0 以外に移動し、 m 回目に 0 に移動するときなので、求める確率を p_m として

$$p_m = \underbrace{\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6}}_{m-1 \text{ 回}} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{m-1} \quad \cdots \text{答え}$$

(3) $n = 1$ のとき 0 $\cdots$ 答え

$$n = 2 \text{ のとき } \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \quad \cdots \text{答え}$$

$n \geq 3$ のとき

点 P が 8 からスタートするとき、1 回目は 2 以上 7 以下のいずれかの点に
確率 $\frac{1}{6}$ で移動する。よって、次の 2 通りの場合わけを考える。

(ア) 1 回目に 1 の目が出るとき、点 P は 7 に移動する。もう一度サイコロを振ると
点 P は 1 以上 6 以下のいずれかの点に移動するのでその後の $n - 2$ 回で最後に 0 に
移動すればよいので(2)の結果を利用するとその確率は

$$\frac{1}{6} \times 1 \times p_{n-2} = \frac{1}{36} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3}$$

となる。

(イ) 1 回目に 2 以上の目が出るとき、点 P は 2 以上 6 以下の点に移動する。その後の
 $n - 1$ 回で最後に 0 に移動すればよいので(2)の結果を利用するとその確率は

$$\frac{5}{6} \times p_{n-1} = \frac{5}{36} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-2}$$

以上を合わせて求める確率は、

$$\frac{1}{36} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} + \frac{5}{36} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-2} = \frac{31}{125} \left(\frac{5}{6} \right)^n \quad \cdots \text{答え}$$

⑤

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

$$(\cos t)A + (\sin t)B$$

$$= (\cos t) \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (\sin t) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + a \sin t & (a+1) \cos t \\ 2 \sin t & -\cos t - a \sin t \end{pmatrix}$$

より、

$$((\cos t)A + (\sin t)B)^2$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + a \sin t & (a+1) \cos t \\ 2 \sin t & -\cos t - a \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t + a \sin t & (a+1) \cos t \\ 2 \sin t & -\cos t - a \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos t + a \sin t)^2 + 2(a+1) \sin t \cos t & 0 \\ 0 & (\cos t + a \sin t)^2 + 2(a+1) \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \{ (\cos t + a \sin t)^2 + 2(a+1) \sin t \cos t \} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これが零行列に一致する、つまり

$$(\cos t + a \sin t)^2 + 2(a+1) \sin t \cos t = 0 \quad \cdots ※$$

を満たす t が存在するための a の条件を考えればよい。

※を変形して、

$$\cos^2 t + 2a \sin t \cos t + a^2 \sin^2 t + 2(a+1) \sin t \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2t}{2} + a \sin 2t + a^2 \frac{1 - \cos 2t}{2} + (a+1) \sin 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a+2) \sin 2t + (1-a^2) \cos 2t + a^2 + 1 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{4a+2}{\sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1-a^2}{\sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2}} \quad \text{として}$$

$$\sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2} \sin(2t + \alpha) = -(a^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2t + \alpha) = -\frac{(a^2 + 1)}{\sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2}}$$

これを満たす t が存在するための条件は、

$$-1 \leq -\frac{(a^2 + 1)}{\sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2} \leq -(a^2 + 1) \leq \sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 \leq \sqrt{(4a+2)^2 + (1-a^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 1)^2 \leq (4a+2)^2 + (1-a^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 4a + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq -1, -\frac{1}{3} \leq a \quad \cdots \text{答え}$$

(1) $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ は $y = x^2 + 2kx$ 上にあるので、

$$\sin \alpha = \cos^2 \alpha + 2k \cos \alpha$$

が成立。よって $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とで、

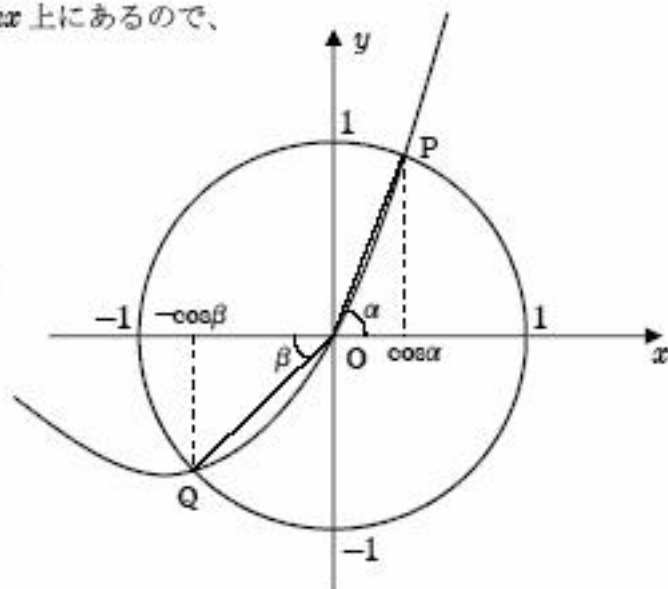
$$\begin{aligned} k &= \frac{\sin \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \\ &= \frac{1}{2}(\tan \alpha - \cos \alpha) \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

また $Q(-\cos \beta, -\sin \beta)$ も

$y = x^2 + 2kx$ 上にあるので、

$$-\sin \beta = \cos^2 \beta - 2k \cos \beta \quad \text{から}$$

$$k = \frac{1}{2}(\tan \beta + \cos \beta) \quad \text{も成立。}$$



(2) 面積を求める図形は

(半径 1, 中心角 $\pi - \alpha + \beta$ の扇形)

+ (直線 OQ と $y = f(x)$ の囲む図形)

+ (直線 OP と $y = f(x)$ の囲む図形)

と分解できるので、

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) + \int_{-\cos \beta}^0 \{(\tan \beta)x - f(x)\} dx + \int_0^{\cos \alpha} \{(\tan \alpha)x - f(x)\} dx \\ &= \frac{\pi - \alpha + \beta}{2} - \int_{-\cos \beta}^0 \{x^2 + (\cos \beta)x\} dx - \int_0^{\cos \alpha} \{x^2 - (\cos \alpha)x\} dx \\ &= \frac{\pi - \alpha + \beta}{2} - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{\cos \beta}{2}x^2 \right]_{-\cos \beta}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\cos \alpha}{2}x^2 \right]_0^{\cos \alpha} \\ &= \frac{\pi - \alpha + \beta}{2} + \frac{1}{6}(\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta) \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

$$\ast \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \text{ は使いませんでした。}$$

(3) $k = \frac{1}{2}(\tan \alpha - \cos \alpha) = \frac{1}{2}(\tan \beta + \cos \beta)$ について、

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ から $-1 < \cos \alpha < 1$, $-1 < \cos \beta < 1$ であり、

$k \rightarrow \infty$ のとき $\tan \alpha \rightarrow \infty$, $\tan \beta \rightarrow \infty$ から、 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$, $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi - \alpha + \beta}{2} + \frac{1}{6}(\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta) \right\} \\ &= \frac{\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{1}{6}(0^3 + 0^3) = \frac{\pi}{2} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$