

$2^x = t$ とおくと $t > 0$ である.

与式は

$$4t^2 + at + 1 - a > 0 \iff 4t^2 + 1 > -a(t-1) \text{ となる.}$$

この左辺は放物線 $C: y = 4t^2 + 1$ である.

右辺は傾き $-a$ で点 $(1, 0)$ を通る直線 $L: y = -a(t-1)$ である.

$t > 0$ の範囲で, C が L より上にあることが必要十分である.

$t > 0$ における C の端の点 $(0, 1)$ を通るときの a の値は $a = 1$, 傾きは $-a = -1$ である.

グラフより, 傾きが -1 より小さくなると L が C の上に出てしまうので, 不適である. したがって $-a \geq -1$, つまり $a \leq 1$ が必要である.

次に C と L が共有点を持たない a の値を求める.

(C の式) - (L の式): $4t^2 + at + 1 - a = 0$ の判別式を D とおくと

$$D = a^2 - 4 \cdot 4(1-a) = a^2 + 16a - 16 < 0 \iff -8 - \sqrt{80} < a < -8 + \sqrt{80}$$

傾きの言葉で書くと

$$8 - 4\sqrt{5} < -a < 8 + 4\sqrt{5}$$

グラフより, 傾きが -1 から始まって, どんどん増えていくと, C, L が接する値 $-a = 8 + 4\sqrt{5}$ になった瞬間, L が C の上に乗っかってしまい不適となる. それ以降は L が C の上にはみ出していく.

以上より

$$-1 \leq -a < 8 + 4\sqrt{5}$$

$$-8 - 4\sqrt{5} < a \leq 1$$

.....(答)

- (1) A が原点, $\overrightarrow{AB}$ が x 軸の正方向, $\overrightarrow{AC}$ が y 軸の正方向となるような座標を入れて考える.

このとき, 各点の座標は A (0, 0), B (1, 0), C (0, a) ($a > 0$) とおける.
 直線 BC の式は $y = -ax + a$ なので, 線分 BC 上の点 D は
 $D(x, -ax + a)$ ($0 \leq x \leq 1$) とおける.

$$t = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ -ax + a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \text{ なので, } 0 \leq t \leq 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) 前の小問より $D(t, -at + a)$ とおける.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} \iff \begin{pmatrix} t \\ -at + a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -at \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \\ &\iff (-at + a)a = (-at)(-a) \\ &\iff -t + 1 = (-t)(-1) \\ &\iff 1 = 2t \\ &\iff t = \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(1) 取り出す順列の総数は ${}_{10}P_4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ 通り.

青青青赤の順に出るのは, ${}_7P_3 \cdot {}_3P_1 = (7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3$ 通り.

$$\text{よって, } \frac{(7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 3}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{8} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 選び方の総数は ${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$ 通り.

最初の8回で出る青5つの選び方と, 赤3つの選び方の総数は

$${}_7C_5 \cdot {}_3C_3 = 21 \text{ 通り.}$$

$$\text{よって, } \frac{21}{45} = \frac{7}{15} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 7回までの選び方の総数は ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 120$ 通り.

最初の7回で出る青5つの選び方と, 赤2つの選び方の総数は

$${}_7C_5 \cdot {}_3C_2 = 21 \cdot 3 \text{ 通り.}$$

8回めの選び方の総数は ${}_3C_1 = 3$ 通り

8回めで出る赤1つの選び方の総数は ${}_1C_1 = 1$ 通り

$$\text{よって, } \frac{21 \cdot 3}{120} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{40} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$D: 2y > \begin{cases} x+1-3(x-1)=-2x+4 & (x < 1 \text{ のとき}) \\ x+1+3(x-1)=4x-2 & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\iff y > \begin{cases} -x+2 & (x < 1 \text{ のとき}) \\ 2x-1 & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\iff y > -x+2 \text{ かつ } y > 2x-1$$

$C \subset D \iff C: y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ のグラフが

直線 $L_1: y = -x + 2$ の上側かつ直線 $L_2: y = 2x - 1$ の上側に来る.

L_1 に関する条件より

$x^2 - 2ax + a^2 + a + 2 = -x + 2$ が実数解を持たない.

$\iff x^2 + (1-2a)x + a^2 + a = 0$ の判別式

$$D_1 = (1-2a)^2 - 4(a^2 + a) = -8a + 1 < 0 \iff \frac{1}{8} < a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

L_2 に関する条件より

$x^2 - 2ax + a^2 + a + 2 = 2x - 1$ が実数解を持たない.

$\iff x^2 - (2a+2)x + a^2 + a + 3 = 0$ の判別式を D_2 とおくと,

$$D_2 / 4 = (a+1)^2 - (a^2 + a + 3) = a - 2 < 0 \iff a < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \frac{1}{8} < a < 2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$