

(1) 因数分解の公式より

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 + 3abc - c^3 &= a^3 + b^3 + (-c)^3 - 3ab(-c) \\
 &= \{a + b + (-c)\} \{a^2 + b^2 + (-c)^2 - ab - b(-c) - (-c)a\} \\
 &= (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) \\
 &= (a + b - c) \frac{1}{2} \{(a - b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$a + b = c$ のときは、①式の第1因数が0となるので、① = 0となり、

$$a^3 + b^3 + 3abc - c^3 = 0 \quad \text{より与式を得る.} \quad (\text{証明終り})$$

(2) $a + b \geq c$ のときは、①式の第1因数が0以上となる.

①式の第2因数も0以上なので ① ≥ 0 となり、

$$a^3 + b^3 + 3abc - c^3 \geq 0 \quad \text{より与式を得る.} \quad (\text{証明終り})$$

- (1) 1枚の紙の面積は $L+1$ である. 紙は L 枚使うので, 使う紙の総面積は

$$(L+1)L = L^2 + L$$

長方形 A の場合, 糊付けで重なる部分の面積は1. それが $L-1$ ヶ所あるので,

$$\begin{aligned} S_1 &= (L^2 + L) - (L-1) \\ &= L^2 + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

長方形 B の場合, 糊付けで重なる部分の面積は $(L+1)a$. それが $L-1$ ヶ所あるので,

$$\begin{aligned} S_2 &= (L^2 + L) - (L+1)a(L-1) \\ &= (1-a)L^2 + L + a \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2)

$$\begin{aligned} S_2 - (S_1 - 1) &= \{(1-a)L^2 + L + a\} - \{L^2 + 1 - 1\} \\ &= -aL^2 + L + a \end{aligned} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$\textcircled{1} = -4a + 2 + a = -3a + 2$ なので,

$$\begin{aligned} S_2 > (S_1 - 1) &\Leftrightarrow -3a + 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow a < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

問題の条件 $0 < a < 1$ との共通部分を考えて

$$0 < a < \frac{2}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (3) $\textcircled{1}$ より $S_2 > (S_1 - 1) \Leftrightarrow -L^2 + \frac{1}{a}L + 1 > 0$

これを満たす2以上の自然数 L が存在する a を求めればよい.

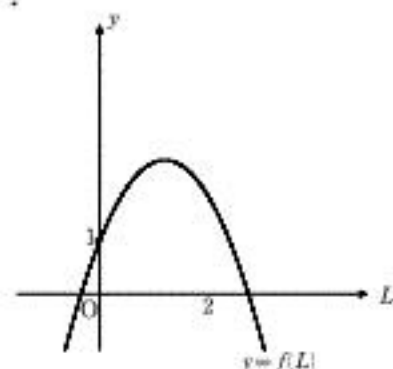
$$0 < a < 1 \text{ より } \frac{1}{a} > 1$$

$f(L) = -L^2 + \frac{1}{a}L + 1$ とおくと, 放物線 $y = f(L)$ は y 軸と点 $(0, 1)$ で交わり, 上に凸だから $f(L) > 0$ となる2以上の自然数 L が存在するための条件は

$f(2) > 0$ である.

$$f(2) = -2^2 + \frac{1}{a} \times 2 + 1 > 0, 0 < a < 1$$

$$\text{より} \quad 0 < a < \frac{2}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$



- (1) 取り出す順列の総数は ${}_{10}P_4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ 通り.
 青青青赤の順に出るのは, ${}_7P_3 \cdot {}_3P_1 = (7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3$ 通り.
 よって, $\frac{(7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 3}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{8}$ (答)

- (2) 選び方の総数は ${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$ 通り.
 最初の 8 回で出る青 5 つの選び方と, 赤 3 つの選び方の総数は
 ${}_7C_5 \cdot {}_3C_3 = 21$ 通り.
 よって, $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ (答)

- (3) 7 回までの選び方の総数は ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 120$ 通り.
 最初の 7 回で出る青 5 つの選び方と, 赤 2 つの選び方の総数は
 ${}_7C_5 \cdot {}_3C_2 = 21 \cdot 3$ 通り.
 8 回めの選び方の総数は ${}_3C_1 = 3$ 通り
 8 回めで出る赤 1 つの選び方の総数は ${}_1C_1 = 1$ 通り
 よって, $\frac{21 \cdot 3}{120} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{40}$ (答)

- (4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数を X とおく.

$$X_k = \begin{cases} 0 & (k \text{ 回目が青}) \\ 1 & (k \text{ 回目が赤}) \end{cases} \quad \text{と定義すると } X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad \text{である.}$$

X の期待値を $E(X)$ とおくと,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) \quad \text{である.} \end{aligned}$$

ここで, 期待値の線形性を用いた,

$$10 \text{ 個中に赤は } 3 \text{ 個だけ入っているので, } k \text{ に依らず } E(X_k) = \frac{3}{10} \quad \text{である.}$$

よって,

$$E(X) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \quad \text{.....(答)}$$

(1) $C_1: y = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) のグラフは, $(0, 0)$ から $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ まで増加し,

そこから $(\pi, 0)$ まで減少する直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に関して対称なグラフである.①

$C_2: y = \sin(\theta - 2a)$ のグラフは, $\sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に $2a$ だけ平行移動したものなので, C_1 の $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ に対応する点は $\left(\frac{\pi}{2} + 2a, 1\right)$ である.

①より, これら 2 点の垂直 2 等分線 $\theta = \frac{\pi}{2} + a$ に関して C_1 と C_2 は対称である.
グラフより

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + a \text{ で } \sin \theta \geq \sin(\theta - 2a),$$

$$\frac{\pi}{2} + a \leq \theta \leq \pi \text{ で } \sin \theta \leq \sin(\theta - 2a) \text{ が分かる. よって,}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}+a} \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi} \sin(\theta - 2a) d\theta \\ &= [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}+a} + [-\cos(\theta - 2a)]_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi} \\ &= \left\{ -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \cos 0 \right\} + \left\{ -\cos(\pi - 2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \right\} \\ &= (\sin a + 1) + \{\cos(-2a) - \sin(-a)\} \quad (\text{加法公式を用いた}) \\ &= (\sin a + 1) + \cos 2a + \sin a \\ &= \cos 2a + 2\sin a + 1 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 前小問より

$$\begin{aligned} I &= (1 - \sin^2 a) + 2\sin a + 1 \\ &= -2\left(\sin a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

よって, $\sin a = \frac{1}{2}$ ($0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$) のとき,

つまり $a = \frac{\pi}{6}$ のとき, 最大値 $I = \frac{5}{2}$ となる.(答)

(1) $APA = P^2$ の両辺に右から PA をかけると $APAPA = P^3A$

$APA = P^2$ の両辺に左から AP をかけると $APAPA = AP^3$

よって, $P^3A = AP^3$ である. (証明終り)

(2) $P^3 = \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}$ なので,

$$\begin{aligned} P^3A = AP^3 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ap^3 & bp^3 \\ cq^3 & dq^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap^3 & bq^3 \\ cp^3 & dq^3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} bp^3 = bq^3 \\ cq^3 = cp^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b(p^3 - q^3) = 0 \\ c(p^3 - q^3) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(i) $p^3 = q^3$ のとき

$p = q$ なので, $P = pE$ となる. ここで E は 2 次の単位行列である.

このとき, $APA = P^2 \Leftrightarrow pA^2 = p^2E$

$$\Leftrightarrow A^2 = pE$$

($p > 0$ なので特に $p \neq 0$ であることを用いた)

$$\Leftrightarrow (a+d) - (ad-bc)E = pE$$

(ケーリー・ハミルトンの定理を用いた)

(i-1) $a+d \neq 0$ のとき $A = \frac{p+(ad-bc)}{a+d}E$ となる.

$A = kE$ と略記して $A^2 = pE$ に代入すると $k^2 = p$ より $k = \pm\sqrt{p}$ を得る.

よって $A = \pm\sqrt{p}E$

(i-2) $a+d=0$ のとき $-(ad-bc)E = pE$ となる.

これより $-(ad-bc) = p$ 左辺は負, 右辺は正なので不適である.

(ii) $p^3 \neq q^3$ のとき

$b=0$ かつ $c=0$ なので, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ となる.

$$\begin{aligned} APA = P^2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2p & 0 \\ 0 & d^2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2p = p^2 \\ d^2q = q^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = p \\ d^2 = q \end{cases} \quad (p \neq 0 \text{ であることを用いた}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{p} \\ d = \pm\sqrt{q} \end{cases} \end{aligned}$$

問題の条件 $0 < ad-bc = ad$ より, 複合同順である.

(i), (ii) より $A = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$ (答)

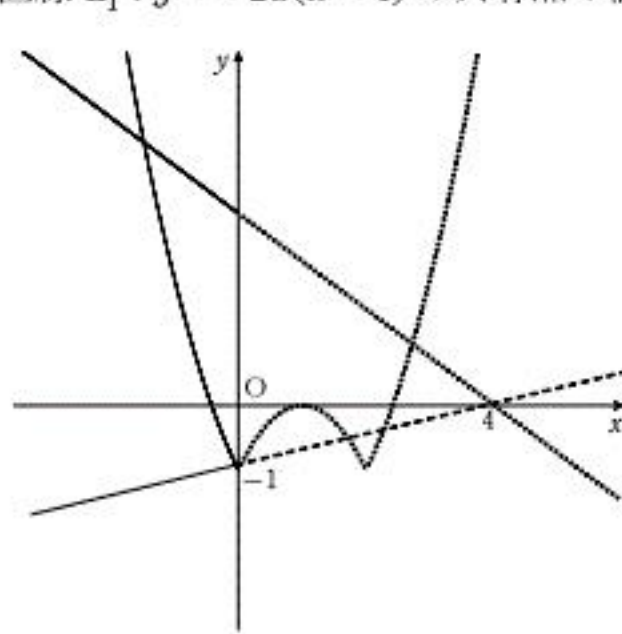
(i) $x < 0$ のとき.

$$\text{与式は } x(x-2) - 2ax + 4a(x-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 2a(-x+4)$$

となる.

この解は, 放物線 $C_1: y = x^2 - 2x - 1$ ($x < 0$) と, 定点 $(4, 0)$ を通る

傾き $-2a$ の直線 $L_1: y = -2a(x-4)$ の共有点の個数に等しい.



C_1 の端の点 $(0, -1)$ を通るとき a の値は $-\frac{1}{8}$ であり, このときの L_1 の

傾きは $\frac{1}{4}$ である.

グラフから C_1 と L_1 が共有点を持つのは, 傾きがこれより小さい場合なので,

$a > -\frac{1}{8}$ のときである.

このとき, $(C_1 \text{ の式}) - (L_1 \text{ の式}) : x^2 + 2(a-1)x - 8a - 1 = 0$ の

定数項 $-8a - 1 < 0$ なので, 解は正, 負一つずつとなる. したがって, C_1 と

L_1 の異なる共有点は 1 個だけである.

よって,

$$\begin{cases} 0 \text{ 個} & \left(a \leq -\frac{1}{8} \text{ のとき} \right) \\ 1 \text{ 個} & \left(a > -\frac{1}{8} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

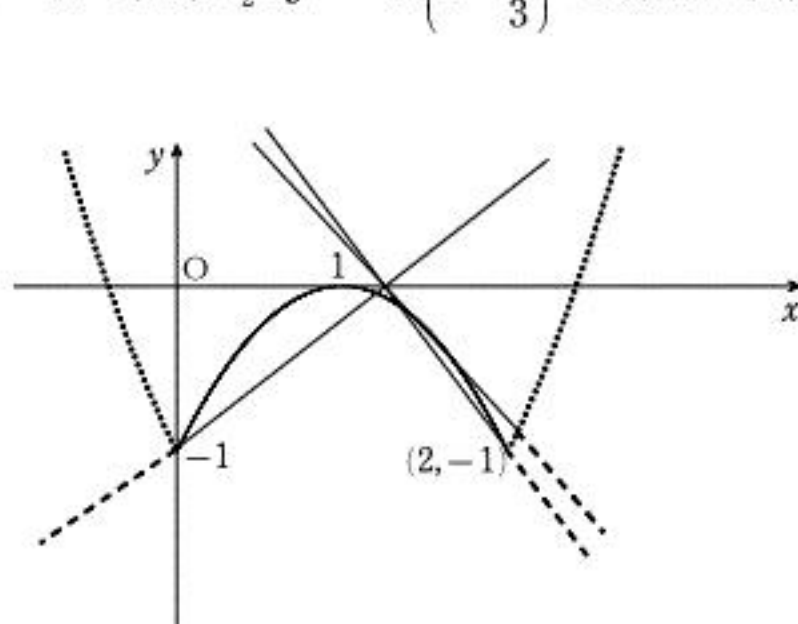
(ii) $0 \leq x < 2$ のとき.

$$\text{与式は } -x(x-2) + 2ax + 4a(x-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 2a(-3x+4)$$

となる.

この解は, 放物線 $C_2: y = -x^2 + 2x - 1$ ($0 \leq x < 2$) と, 定点 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ を通る

傾き $-6a$ の直線 $L_2: y = -6a\left(x - \frac{4}{3}\right)$ の共有点の個数に等しい.



C_2 と L_2 が共有点を持つ必要条件を出す.

$(L_2 \text{ の式}) - (C_2 \text{ の式}) : x^2 - 2(3a+1)x + 8a+1 = 0$ の判別式を D_2 とおくと,

$$D_2/4 = (3a+1)^2 - (8a+1) = 9a^2 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0, \frac{2}{9} \leq a$$

このときの L_2 の傾きは $-6a \leq -\frac{4}{3}, 0 \leq -6a$ となる. 逆に, グラフから,

傾きがこの間の場合 C_2 と L_2 が共有点を持つ.

C_2 の境界線 $(0, -1)$ を通るとき a の値は $-\frac{1}{8}$ であり, このときの L_2 の

傾きは $\frac{3}{4}$ である.

傾きがここから 0 までのとき, つまり, $-\frac{1}{8} \leq a \leq 0$ までのとき, 共有点を 2 つ

もつ. $a = 0$ のときは 2 つの共有点が一致する.

C_2 の端の点 $(2, -1)$ を通るとき a の値は $\frac{1}{4}$ であり, このときの L_2 の

傾きは $-\frac{3}{2}$ である.

傾きがここから $-\frac{4}{3}$ までのとき, つまり, $\frac{1}{4} < a \leq \frac{2}{9}$ までのとき, 共有点を 2 つ

もつ. $a = \frac{2}{9}$ のときは 2 つの共有点が一致する.

よって,

$$\begin{cases} 1 \text{ 個} & \left(a < -\frac{1}{8} \text{ のとき} \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(-\frac{1}{8} \leq a < 0 \text{ のとき} \right) \\ 1 \text{ 個} & \left(a = 0 \text{ のとき} \right) \\ 0 \text{ 個} & \left(0 < a < \frac{2}{9} \text{ のとき} \right) \end{cases}, \begin{cases} 1 \text{ 個} & \left(a = \frac{2}{9} \text{ のとき} \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(\frac{2}{9} < a < \frac{1}{4} \text{ のとき} \right) \\ 1 \text{ 個} & \left(\frac{1}{4} \leq a \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

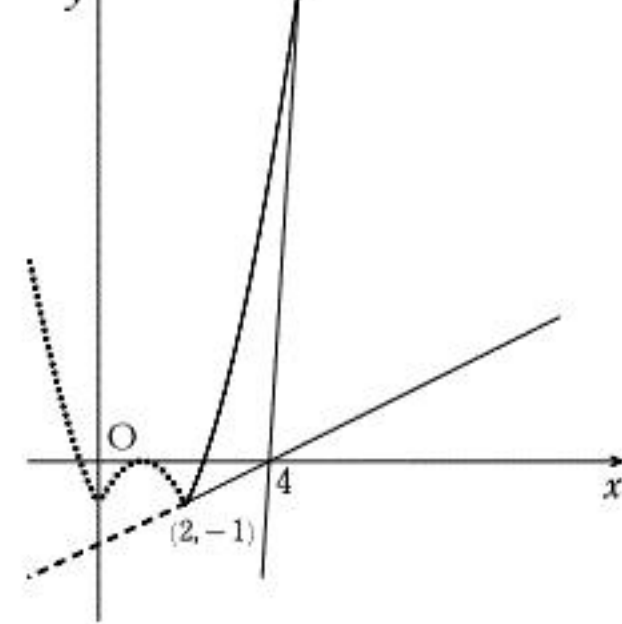
(iii) $2 \leq x$ のとき.

$$\text{与式は } x(x-2) + 2ax - 4a(x-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 2a(x-4)$$

となる.

この解は, 放物線 $C_3: y = x^2 - 2x - 1$ ($2 \leq x$) と, 定点 $(4, 0)$ を通る

傾き $2a$ の直線 $L_3: y = 2a(x-4)$ の共有点の個数に等しい.



$(C_3 \text{ の式}) - (L_3 \text{ の式})$ を $f_3(x) = x^2 - 2(a+1)x + 8a - 1$ である.

C_3 の境界点 $(2, -1)$ を通るとき a の値は $\frac{1}{4}$ であり, このときの L の傾き

は $\frac{1}{2}$ である.

(iii-1) L_3 の傾きが $\frac{1}{2}$ 以下のとき. つまり, $a \leq \frac{1}{4}$ のとき, グラフより C_3 と

L_3 は共有点を持つ.

$f_3(2) = 4 - 4(a+1) + (8a-1) = 4a - 1 \leq 0$, 軸 $x = a+1 < 2$ なので,

$f_3(x) = 0$ の解の一つは 2 未満で, もう一つは 2 以上となる.

したがって, この場合 C_3 と L_3 の異なる共有点は 1 個だけある.

(iii-2) L_3 の傾きが $\frac{1}{2}$ より大きいとき.

C_3 と L_3 が共有点を持つ必要条件を出す.

$(C_3 \text{ の式}) - (L_3 \text{ の式}) : x^2 - 2(a+1)x + 8a - 1 = 0$ の判別式を D_3 と

おくと,

$$D_3/4 = (a+1)^2 - (8a-1) = a^2 - 6a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 3 - \sqrt{7},$$

$3 + \sqrt{7} \leq a$ であり, このときの L_3 の傾きは

$$2a \leq 6 - 2\sqrt{7}, 6 + 2\sqrt{7} \leq 2a \text{ となる.}$$

グラフより, 後者の不等式のとき C_3 と L_3 が 2 つの共有点を持つ. ただし,

$a = 3 + \sqrt{7}$ のときは 2 つの共有点が一致する.

よって,

$$\begin{cases} 1 \text{ 個} & \left(a \leq \frac{1}{4} \text{ のとき} \right) \\ 0 \text{ 個} & \left(\frac{1}{4} < a < 3 + \sqrt{7} \text{ のとき} \right) \\ 1 \text{ 個} & \left(a = 3 + \sqrt{7} \text{ のとき} \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(3 + \sqrt{7} < a \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

(i), (ii), (iii) をまとめて,

$$\begin{cases} 2 \text{ 個} & \left(a < -\frac{1}{8} \text{ のとき} \right) \\ 3 \text{ 個} & \left(a = -\frac{1}{8} \text{ のとき} \right) \\ 4 \text{ 個} & \left(-\frac{1}{8} < a < 0 \text{ のとき} \right) \end{cases}, \begin{cases} 3 \text{ 個} & \left(a = 0 \text{ のとき} \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(0 < a < \frac{2}{9} \text{ のとき} \right) \\ 3 \text{ 個} & \left(a = \frac{2}{9} \text{ のとき} \right) \\ 4 \text{ 個} & \left(\frac{2}{9} < a < \frac{1}{4} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \text{ 個} & \left(a = \frac{1}{4} \text{ のとき} \right) \\ 2 \text{ 個} & \left(\frac{1}{4} < a < 3 + \sqrt{7} \text{ のとき} \right) \\ 3 \text{ 個} & \left(a = 3 + \sqrt{7} \text{ のとき} \right) \\ 4 \text{ 個} & \left(3 + \sqrt{7} < a \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

よって, $-\frac{1}{8} < a < 0, \frac{2}{9} < a < \frac{1}{4}, 3 + \sqrt{7} < a$ (答)

6 <別解>

与式より

$$2a = \frac{1 - |x(x-2)|}{|x| - 2|x-2|}$$

右辺を $f(x)$ とおく

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 2x + 1}{x-4} = -(x+2) - \frac{7}{x-4} & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{3x-4} = \frac{1}{3} \left(x - \frac{2}{3} \right) + \frac{\frac{1}{9}}{3x-4} & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ \frac{x^2 - 2x - 1}{x-4} = (x+2) + \frac{7}{x-4} & (2 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

