

(1)

$$\begin{aligned}
 \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{y^3-x^3}{y-x} - \frac{x^3-a^3}{x-a} \\
 &= y^2+xy+x^2-x^2-ax-a^2 \\
 &= (y-a)(a+x+y) > 0 \quad (\because y-a > 0, a+x+y > 0)
 \end{aligned}$$

よって、与式が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

(1)より、 $y < x < a \leq 0$ を満たす全ての a, x, y に対して

$$\begin{aligned}
 \frac{f(-x)-f(-a)}{-x+a} &< \frac{f(-y)-f(-x)}{-y+x} \\
 \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &< \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad (\because f(-x) = -f(x))
 \end{aligned}$$

が成り立つ。両辺に $(x-a)(y-x) (> 0)$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned}
 yf(x) - xf(x) - yf(a) + xf(a) &< xf(y) - xf(x) - af(y) + af(x) \\
 \Leftrightarrow f(x) &> \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y} \quad (\because a-y > 0)
 \end{aligned}$$

が得られる。これより、 $b \leq 0$ であれば、 $y < x < b$ を満たす全ての x, y に対して与式が成り立つことが示された。逆に、 $b > 0$ である場合、 $x=0$ を与式に代入すると

$$0 > \frac{-yf(b) + bf(y)}{b-y} = -by(b+y) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。 $y < 0, b > 0$ であることに注意すると、 $b+y > 0$ となるように y を選べば、 $\textcircled{1}$ の最右辺が正となり、与式は成り立たない。

以上より、求める b の範囲は $b \leq 0$ である。

答 $b \leq 0$

(1)

$y=x^2$ を x について微分すると $y'=2x$ なので、 P における接線の傾きは $2a$ である。

[1] $a \neq 0$ のとき

直線 l の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であり、 (a, a^2) を通るので、この方程式は $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$

[2] $a = 0$ のとき

P における接線は $y=0$ なので、直線 l の方程式は $x=0$

$$\text{答} \begin{cases} y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} & (a \neq 0) \\ x = 0 & (a = 0) \end{cases}$$

(2)

$x=a$ 上の任意の点を (a, s) とおき、 l に関して折り返して移動する先の点を (t, u) とおく。

すると、 (a, s) と (t, u) の中点が l 上にあり、 (a, s) と (t, u) を結ぶ直線は l と直交することから次式が成り立つ。

$$\frac{s+u}{2} = -\frac{1}{2a} \times \frac{a+t}{2} + a^2 + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{s-u}{a-t} = 2a \quad \dots \textcircled{2}$$

②より

$$u = s - 2a^2 + 2at \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られるので、これを①に代入して整理すると

$$s = 2a^2 + \frac{1}{4} - \left(a + \frac{1}{4a}\right)t \quad \dots \textcircled{4}$$

を得る。さらに、④を③に代入して整理すると $u = \left(a - \frac{1}{4a}\right)t + \frac{1}{4}$ が得られる。

よって、求める直線 m の方程式は $y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}$ である。

$$\text{答} \quad y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}$$

(3)

直線 m の方程式は

$$y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4xa^2 + (1-4y)a - x = 0$$

と変形できるので、直線 m は a の値によらず常に定点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る。

$$\text{答} \quad \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

硬貨を2枚投げるとき、2枚表が出る事象をA、2枚裏が出る事象をB、表と裏が1枚ずつ出る事象をCとすると、1回の試行について各事象が起こる確率はそれぞれ

$$A: \frac{1}{4}, B: \frac{1}{4}, C: \frac{1}{2}$$

である。

(1)

問題の試行を2回行ったとき、Pが-1の位置にいるのはBとCが順序に関係なく1回ずつ起こるときである。したがって、 $S_2 = -1$ となる確率は、

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}$$

(2)

問題の試行を3回行ったとき、Pが1の位置にいるのは、

$$\begin{cases} A \text{ が } 2 \text{ 回}, B \text{ が } 1 \text{ 回起こるとき} \\ A \text{ が } 1 \text{ 回}, C \text{ が } 2 \text{ 回起こるとき} \end{cases}$$

のいずれかである。したがって、 $S_3 = 1$ となる確率は、

$$\begin{aligned} {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + {}_3C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{3}{64} + \frac{3}{16} \\ &= \frac{15}{64} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{15}{64}$$

(3)

各試行において起きた事象に応じた[表が出た回数],[裏が出た回数],[表が出た総数-裏が出た総数],[Pの位置]の各増減は次表のようになる。

事象 \ 増減	表が出た総数	裏が出た総数	(表が出た総数-裏が出た総数)	Pの位置
A	2	0	2	+1
B	0	2	-2	-1
C	1	1	0	0

よって、各試行において[Pの位置の増減]は[(表が出た総数-裏が出た総数)の増減]の $\frac{1}{2}$ に対応することがわかる。

今、試行は n 回繰り返すので、硬貨はのべ $2n$ 枚投げたことになる。さらに、このうち表は i 回出たので、裏は $2n-i$ 回出たことがわかる。ゆえに、

$$(\text{表が出た総数}-\text{裏が出た総数})=i-(2n-i)=2i-2n$$

となり、 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}(2i-2n) = i-n$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad S_n = i-n$$

(4)

(3)より、

$$S_n = i-n = k$$

$$i = k+n$$

である。よって n 回試行を行ったとき、すなわち硬貨をのべ $2n$ 枚投げたときに、表の総数が $k+n$ 、裏の総数が $n-k$ となる確率を求めればよい。 $|k| > n$ のとき、 $S_n = k$ となることはない。 $|k| \leq n$ のとき、求める確率は、

$${}_{2n}C_{n+k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{{}_{2n}C_{n+k}}{2^{2n}}$$

である。

$$\begin{aligned} (\text{答}) \quad & \frac{{}_{2n}C_{n+k}}{2^{2n}} \quad (|k| \leq n) \\ & 0 \quad (|k| > n) \end{aligned}$$

(1)

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \cdots \textcircled{1}$$

を満たすような点 P が存在すると仮定する。

辺 AB の中点が M, 辺 CD の中点が N であることから

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}, \quad \overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{2}$$

が成り立つことに注意すれば,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) - (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} - \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \vec{0} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

しかし一方で, 点 N, M はそれぞれ四面体の辺上の異なる点であることであるから $\overrightarrow{NM} \neq \vec{0}$ であり, これは②と矛盾する。

よって, 仮定が間違っており, ①式を満たすような点 P は存在しないことがわかる。

(答)存在しない

(2)

辺 AB の中点が M, 辺 CD の中点が N なので,

$$\overrightarrow{QM} = \frac{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}}{2}, \quad \overrightarrow{QN} = \frac{\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}}{2}$$

となることに注意すると, 問の与式は

$$|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}}{2} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{QM}| = |\overrightarrow{QN}|$$

と変形できる。よって, 点 Q は点 M と点 N から等距離にある点であるから, 点 Q は線分 MN を垂直二等分する平面を描く。

(答) 線分 MN を垂直二等分する平面

(3)

点 R は以下の等式を満たしながら動く。

$$|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2 \cdots \textcircled{3}$$

点 M は辺 AB の中点なので,

$$\begin{cases} |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{4}$$

という関係が成り立つことに注意すれば, ③式左辺は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 &= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MR})^2 + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MR})^2 \\ &= (|\overrightarrow{MA}|^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MR} + |\overrightarrow{MR}|^2) + (|\overrightarrow{MB}|^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MR} + |\overrightarrow{MR}|^2) \\ &= (|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2) - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MR} + 2|\overrightarrow{MR}|^2 \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \right)^2 + \left(\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \right)^2 \right\} - 2 \cdot \vec{0} \cdot \overrightarrow{MR} + 2|\overrightarrow{MR}|^2 \quad (\because \textcircled{4}) \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2 \end{aligned}$$

と変形できる。同様に③式右辺は,

$$|\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CD}|^2 + 2|\overrightarrow{NR}|^2$$

と変形できるので, 結局③式は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{MR}|^2 &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{CD}|^2 + 2|\overrightarrow{NR}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{MR}|^2 - |\overrightarrow{NR}|^2 &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) \cdots \textcircled{3}' \end{aligned}$$

と変形することができる。さらに,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MR}|^2 - |\overrightarrow{NR}|^2 &= |\overrightarrow{MR}|^2 - (\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MN})^2 \\ &= |\overrightarrow{MR}|^2 - (|\overrightarrow{MR}|^2 - 2\overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{MN} + |\overrightarrow{MN}|^2) \\ &= 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} - |\overrightarrow{MN}|^2 \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

であることから, ③', ⑤より

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} - |\overrightarrow{MN}|^2 &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{MN}|^2 + \frac{1}{8} (|\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) \end{aligned}$$

と書ける。ここで, $|\overrightarrow{MN}|, |\overrightarrow{CD}|, |\overrightarrow{AB}|$ は一定の値なので, 点 R が③の条件を満たしながら動くとき $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は点 R の取り方によらず一定であることが示された。

(証明終)

(4)

(2)解答より, 「(2)の点 Q が描く図と点 R が描く図形が一致する」ことは「点 R が,

$|\overrightarrow{MR}| = |\overrightarrow{NR}|$ を満たしながら動く」と言い換えることができる。

「点 R が, $|\overrightarrow{MR}| = |\overrightarrow{NR}|$ を満たしながら動く」とき, (3)の③'式より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (|\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) &= 0 \\ |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{CD}|^2 \\ |\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{CD}| \quad (\because |\overrightarrow{AB}| > 0, |\overrightarrow{CD}| > 0) \end{aligned}$$

となり, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ が成り立つ。

逆に $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ が成り立つとき, やはり(3)の③'式より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MR}|^2 - |\overrightarrow{NR}|^2 &= 0 \\ |\overrightarrow{MR}|^2 &= |\overrightarrow{NR}|^2 \\ |\overrightarrow{MR}| &= |\overrightarrow{NR}| \quad (\because |\overrightarrow{MR}| > 0, |\overrightarrow{NR}| > 0) \end{aligned}$$

となり, 点 R は $|\overrightarrow{MR}| = |\overrightarrow{NR}|$ を満たす。

以上より題意は示された。

(証明終)