

11

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$$

$y < a$ なる y を固定する。 $y < x < a$ を満たす x について、

$$\begin{aligned} f(x) &> \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y} \\ &= \frac{f(a) - f(y)}{a-y}(x-y) + f(y) \end{aligned}$$

から、 x の関数

$$\begin{aligned} G(x) &= f(x) - \frac{f(a) - f(y)}{a-y}(x-y) - f(y) \\ &= (x-y)(x-a)(x+y+a+3) \end{aligned}$$

を考えると、 $G(x)$ は x の 3 次関数であり $G(y) = G(a) = G(-y-a-3) = 0$ をみたす。

するとグラフの概形から、図のような形でのみ、

$$y < x < a \text{ なる任意の } x \text{ で } G(x) > 0$$

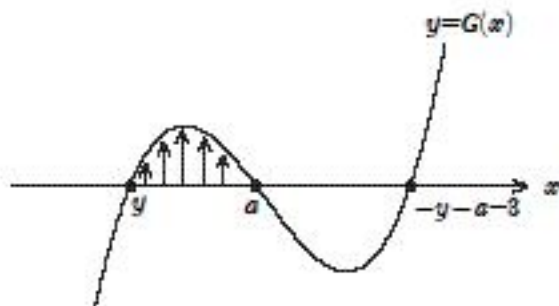
をみたすから、

$$a < -y-a-3$$

が $y < a$ なる任意の y で成立するための条件を考えて、

$$a \leq -2a-3$$

$$\Leftrightarrow a \leq -1 \quad \cdots \text{答}$$



2

$$a > 0, b > 0$$

$$C: y = x^3 - a^2x + a^3$$

$$y' = 3x^2 - a^2$$

(1) 曲線 C 上の点 $(t, t^3 - a^2t + a^3)$ での接線の方程式は、

$$y = (3t^2 - a^2)(x - t) + t^3 - a^2t + a^3$$

これが点 $P(b, 0)$ を通るとき、

$$0 = (3t^2 - a^2)(b - t) + t^3 - a^2t + a^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この t の 3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつための条件を考えればよい。

①の左辺を $f(t)$ とおくと、

$$f'(t) = 6t(t - b)$$

$$f(0) = a^2(b - a)$$

$$f(b) = a^2b - a^3 - b^3$$

から、

$$f(0) > 0 \quad \text{かつ} \quad f(b) < 0$$

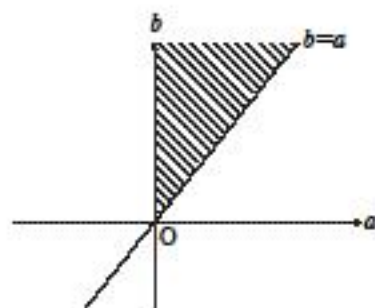
$$\Leftrightarrow b > a \quad \text{かつ} \quad a^3 + b^3 - a^2b > 0$$

$$\Leftrightarrow b > a$$

$$(\because b > a \text{ のとき, } a^3 + b^3 - a^2b = a^3 + b(b^2 - a^2) > 0)$$

以上より点 (a, b) の存在する領域は

図の斜線部分(境界は含まない)



(2) ①が異なる 2 つの実数解をもつための条件は、

$$f(0) = 0 \quad \text{または} \quad f(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = a \quad \text{または} \quad a^3 + b^3 - a^2b = 0$$

しかし、 $b > a$ のとき $a^3 + b(b^2 - a^2) > 0$ 、 $b = a$ のとき $a^3 > 0$ 、

$b < a$ のとき $b^3 + a^2(a - b) > 0$ だから $a^3 + b^3 - a^2b \neq 0$ である。

よって $b = a$ のとき、

$$f(t) = 2t^3 - 3at^2$$

$$f(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0, \frac{3}{2}a$$

よって $A(0, a^3)$ 、 $B\left(\frac{3}{2}a, \frac{23}{9}a^3\right)$ 、 $P(a, 0)$ として、

$$\overrightarrow{PA} = (-a, a^3), \quad \overrightarrow{PB} = \left(\frac{1}{2}a, \frac{23}{9}a^3\right) \text{ から}$$

$\angle APB$ が 90° より小さい

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2 + \frac{23}{9}a^6 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 > \frac{4}{23}$$

$$\Leftrightarrow a > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$$

以上から、

$$b = a \quad \text{かつ} \quad a > \sqrt[4]{\frac{4}{23}} \quad \cdots \text{答}$$

3

カードの取り出し方は 4^5 通りあり、これらはすべて同様に確からしい。

(1) 5回中1が2回、その他の数(2~4)が3回出たときで、

①①△△△

$$\frac{{}_5C_2 \cdot 1^2 \cdot 3^3}{4^5} = \frac{135}{512} \quad \dots \text{答}$$

(2) 5回中1が1回、2が1回、その他の数(3~4)が3回出たときで、

①②△△△

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 2^3}{4^5} = \frac{5}{32} \quad \dots \text{答}$$

(3)

(i) Xにちょうど2回表れる数字が1種類だけのとき、

(ア) ①①□△☆

(イ) ①①□□□

の2通りの形があるので、

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot 3!}{4^5} + \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot \frac{5!}{2!3!}}{4^5} = \frac{360}{4^5}$$

(ii) Xにちょうど2回表れる数字が2種類のとき、

①①②②□

$$\frac{{}_4C_2 \cdot \frac{5!}{2!2!} \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 2^1}{4^5} = \frac{360}{4^5}$$

以上あわせて、

$$\frac{45}{64} \quad \dots \text{答}$$

[4]

$$(1) \quad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} = \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{2}$$

これは線分 AB の中点と線分 CD の中点が一致することを意味するが、 $ABCD$ は四面体であるのでこれは起こらない。よって条件の等式を満たす点 P は存在しない。 …証明終わり

$$(2) \quad |\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}}{2} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{QM}| = |\overrightarrow{QN}|$$

より点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。 …証明終わり

$$(3) \quad |\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MR}|^2 + |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MR}|^2 = |\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MR}|^2 + |\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MR}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MR} - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MR} = |\overrightarrow{MC}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2 - 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MR} - 2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MR}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MR} = |\overrightarrow{MC}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2 - 4 \frac{\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}}{2} \cdot \overrightarrow{MR}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 - 2(\vec{0}) \cdot \overrightarrow{MR} = |\overrightarrow{MC}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2 - 4\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} = \frac{1}{4} \left(|\overrightarrow{MC}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 \right)$$

右辺は R のとり方によらず一定である。 …証明終わり

(4) (2)の結果より、

$$|\overrightarrow{RM}| = |\overrightarrow{RN}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$

を示せばよい。

$$|\overrightarrow{RM}| = |\overrightarrow{RN}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{RM}|^2 = |\overrightarrow{RN}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{RM}|^2 = |\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MR}|^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} = |\overrightarrow{MN}|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(|\overrightarrow{MC}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 \right) = |\overrightarrow{MN}|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(2 \left(|\overrightarrow{MN}|^2 + |\overrightarrow{CN}|^2 \right) - 2|\overrightarrow{MA}|^2 \right) = |\overrightarrow{MN}|^2 \quad (\because \triangle MCD \text{ で中点連結定理より})$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{CN}|^2 = |\overrightarrow{MA}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \quad \cdots \text{証明終わり}$$

[5]

$y = \sin x$ と $y = -x + t$ の交点の x 座標を α とすると、

$$\sin \alpha + \alpha = t \quad (0 < \alpha < \pi)$$

を満たし、 $f(x) = \sin x + x - t$ とすると $\frac{df(x)}{dx} = \cos x + 1 \geq 0$

$$f(0) = -t < 0, \quad f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\pi - t > \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\pi - 3 = \frac{5(\pi-3)}{6} > 0$$

なので $f(\alpha) = 0$ を満たす α は $0 < \alpha < \frac{5}{6}\pi$ にただ 1 つ存在する。

$$\frac{dt}{d\alpha} = \cos \alpha + 1$$

である。図より、

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_0^{\alpha} \sin^2 x dx + \frac{\pi}{3} (\sin \alpha)^2 (t - \alpha) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\alpha} + \frac{\pi}{3} (t - \alpha) \sin^2 \alpha \\ &= \frac{\pi}{6} \left\{ 3\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\alpha + 2(t - \alpha) \sin^2 \alpha \right\} \\ &= \frac{\pi}{6} \left\{ 3\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\alpha + 2 \sin^3 \alpha \right\} \quad (\because t - \alpha = \sin \alpha) \end{aligned}$$

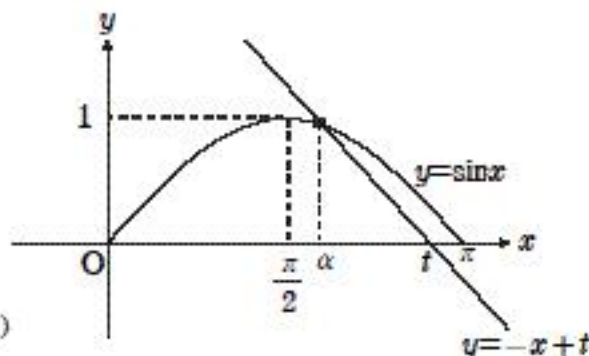
$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{d\alpha} &= \frac{\pi}{6} \left\{ 3 - \frac{3}{2} \cdot 2 \cos 2\alpha + 2 \cdot 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \right\} \frac{d\alpha}{dt} \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot 6 (\cos \alpha + 1) (1 - \cos^2 \alpha) \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ &= \pi \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{d\alpha} &= \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < \alpha < \frac{5}{6}\pi \right) \end{aligned}$$

このとき、

$$t = \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}, \quad V(t) = \frac{\pi}{24} (2\pi - 3\sqrt{3} + 1) \quad \cdots \text{答}$$



6]

X 上の 6 つの頂点を

$$P_n \left(\cos \frac{n\pi}{3}, \sin \frac{n\pi}{3} \right), \quad n=0,1,2,3,4,5$$

とする。このとき $P=P_0$ である。

(1) 行列 A の表す移動による点 P_n の像を Q_n とすると、

条件より、

$$A\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP_0}$$

をみたし、 $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_2}$ であるから、

$$A\overrightarrow{OP_1} = A\overrightarrow{OP_0} + A\overrightarrow{OP_2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ_2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{Q_2Q_1}$$

Q_1, Q_2 は X 上の点であるから、

$$\overrightarrow{Q_2Q_1} = \overrightarrow{P_2P_1} \text{ または } \overrightarrow{Q_2Q_1} = \overrightarrow{P_4P_5} \text{ のみ考えられる。}$$

(i) $\overrightarrow{Q_2Q_1} = \overrightarrow{P_2P_1}$ のとき、

$$A\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_1}, \quad A\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_2}$$

$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ は一次独立であるから A は恒等変換である。よって、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき X の各頂点は不動なので題意は示せた。 …答

(ii) $\overrightarrow{Q_2Q_1} = \overrightarrow{P_4P_5}$ のとき、

$$A\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_5}, \quad A\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_4}$$

よって、具体的に計算することで

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これは x 軸に関する対称移動を与える 1 次変換である。

X の各頂点は x 軸対称な移動で重なることから題意は示せた。 …答

(2) $A\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP_m}$ ($m=0,1,2,3,4,5$) を考える。 $m=0$ のときは(1)の通り。(1)と同様の計算、考察により、

$$A\overrightarrow{OP_1} = A\overrightarrow{OP_0} + A\overrightarrow{OP_2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP_m} = \overrightarrow{Q_2Q_1}$$

から、

$m=1$ のとき、 $(Q_1, Q_2) = (P_2, P_3), (P_0, P_5)$ の対応で、このときそれぞれ

$(Q_3, Q_4, Q_5) = (P_4, P_5, P_0), (P_4, P_5, P_2)$ の対応になる。

$m=2$ のとき、 $(Q_1, Q_2) = (P_1, P_0), (P_5, P_4)$ の対応で、このときそれぞれ

$(Q_3, Q_4, Q_5) = (P_5, P_4, P_3), (P_5, P_0, P_1)$ の対応になる。

$m=3$ のとき、 $(Q_1, Q_2) = (P_2, P_1), (P_4, P_5)$ の対応で、このときそれぞれ

$(Q_3, Q_4, Q_5) = (P_0, P_5, P_3), (P_0, P_1, P_2)$ の対応になる。

$m=4$ のとき、 $(Q_1, Q_2) = (P_3, P_2), (P_5, P_0)$ の対応で、このときそれぞれ

$(Q_3, Q_4, Q_5) = (P_1, P_0, P_5), (P_1, P_2, P_3)$ の対応になる。

$m=5$ のとき、 $(Q_1, Q_2) = (P_0, P_1), (P_4, P_3)$ の対応で、このときそれぞれ

$(Q_3, Q_4, Q_5) = (P_2, P_3, P_4), (P_2, P_1, P_0)$ の対応になる。

以上より X の各頂点は X のいずれかの頂点に移り、そのときの行列は次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ (複号任意)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \mp \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \pm \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \pm \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \mp \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (複号同順)}$$

※一次変換は原点中心の回転移動(60° の整数倍の回転)、直線 $x=0, y=0, y=\pm\sqrt{3}x, y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動を表す変換になっている。