

1

(1) $3^x = t$ とおくと、

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{3} & \dots \textcircled{1} \\ 2t + \frac{a}{t} \leq 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①のとき、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t + a \leq 0$$

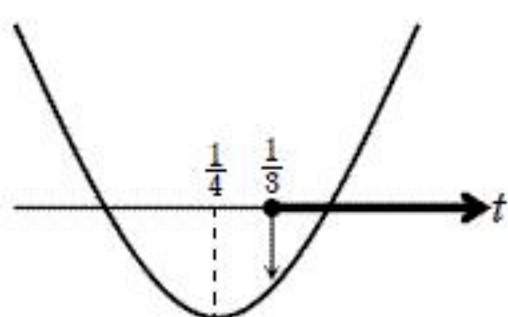
であり、これが①を満たす実数解 t を持てばよいから、
左辺を $f(t)$ とおいて、

$$f(t) = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + a - \frac{1}{8}$$

から、

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{9} \quad \dots \text{答}$$



(2) (1)と同様に $3^x = t$ とおくと、

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{3} & \dots \textcircled{3} \\ t + \frac{a}{t} \geq a & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

③のとき、

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow t^2 - at + a \geq 0$$

であり、これが③の範囲で常に成立すればよいから、
左辺を $g(t)$ とおいて、

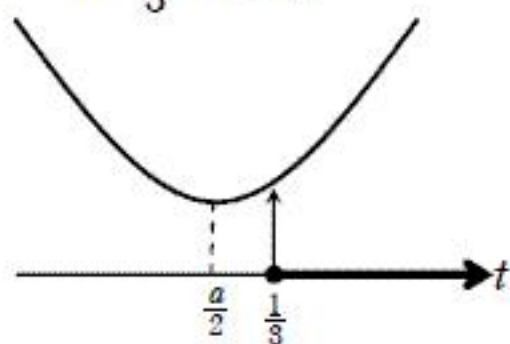
$$g(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + a - \frac{a^2}{4}$$

から、

(i) $\frac{a}{2} < \frac{1}{3}$ つまり $a < \frac{2}{3}$ のとき、

$$g\left(\frac{1}{3}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{6}$$

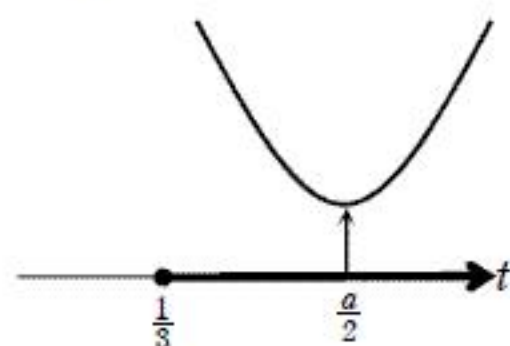


(ii) $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{2}$ つまり $\frac{2}{3} \leq a$ のとき、

$$g\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{a^2}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4$$



以上あわせて、

$$-\frac{1}{6} \leq a \leq 4 \quad \dots \text{答}$$

2

(1) $\overrightarrow{OC} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}$, $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE} = y\overrightarrow{OB}$ から

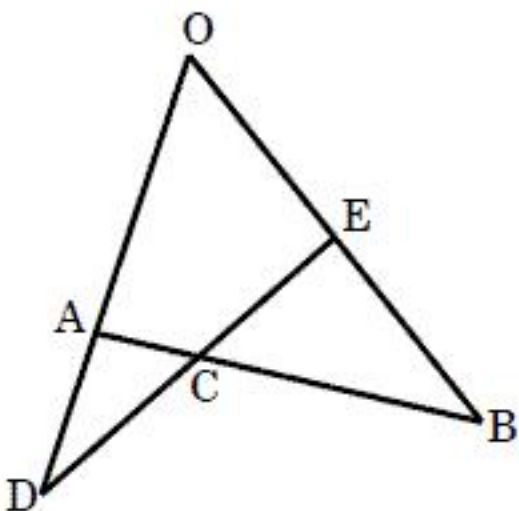
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を消去することで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} \overrightarrow{OD} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y} \overrightarrow{OE} \right) \\ &= \frac{2}{3x} \overrightarrow{OD} + \frac{1}{3y} \overrightarrow{OE}\end{aligned}$$

今、点 C は直線 DE 上にあるから、

$$\frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3 \quad \cdots \text{証明終わり}$$



(2) $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $\angle AOB = \theta$ とすると、

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

$$T = \frac{1}{2} (xa)(yb) \sin \theta$$

$$= xy \left(\frac{1}{2} ab \sin \theta \right)$$

$$= xyS$$

が成立する。よって、

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{xy}$$

$$= \frac{1}{x} \left(3 - \frac{2}{x} \right)$$

$$= -2 \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{9}{8} \geq \frac{9}{8} \quad (\text{等号は } x = \frac{4}{3} \text{ で成立})$$

から $\frac{S}{T}$ は $x = \frac{4}{3}$ のとき最小値 $\frac{9}{8}$ となる。 …答

(1) 先生を T で表す。T がサイコロを 2 回とも 1 の目を出し、かつ A が 2 回とも赤玉を取り出すときであるから、

$$\frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{540} \quad \dots \text{答}$$

(2) B が少なくとも 1 個の赤球を手に入れる確率は、
2 つの事象

D : 1 回目に B が赤球を取り出す事象

E : 2 回目に B が赤球を取り出す事象

を考えたとき、

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E)$$

であり、

$$P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(E) = 1 \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{7}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{10}$$

(1 回目に誰かが赤) (1 回目に誰かが白)

$$P(D \cap E) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

以上より求める確率は、

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \frac{26}{135} \quad \dots \text{答}$$

4

(1) $y = x^2$, $y' = 2x$ から $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は、

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2tx - t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①で $t = a$ とすることで、接線 l の方程式は、

$$y = 2ax - a^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②と直交する直線の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であるから、

$$2t = -\frac{1}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{4a}$$

これを①へ代入することで、接線 m の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

連立方程式②, ③を解くことで、 l, m の交点の座標は、

$$\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}, -\frac{1}{4} \right) \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad \frac{4a^2 - 1}{8a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \frac{1}{2}$$

このときグラフは右図のようになり、
求める面積は、

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{12} \quad \cdots \text{答}$$

