

$$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) 点 (p, q) が $\textcircled{1}$ を満たすとき、

$$q \leq 2ap - a^2 + 2a + 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

これが $-1 \leq a \leq 2$ で常に成立すればよい。

$\textcircled{2}$ の左辺を $f(a)$ とおくと、

$$f(a) = \{a - (p+1)\}^2 + q - (p+1)^2 - 2$$

よって、

$$-1 \leq a \leq 2 \text{ で常に } f(a) \leq 0$$

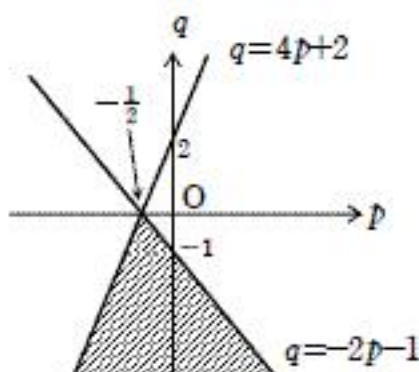
$\Leftrightarrow$ 関数 $f(a)$ ($-1 \leq a \leq 2$) の最大値が 0 以下

$$\Leftrightarrow f(-1) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad f(2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow q \leq -2p - 1 \quad \text{かつ} \quad q \leq 4p + 2$$

よって条件を満たす点 (p, q) の存在領域は、

図の斜線部分(境界を含む)



(2) $\textcircled{2}$ を満たす解が $-1 \leq a \leq 2$ に存在すればよい。

よって、

$$-1 \leq a \leq 2 \text{ で } f(a) \leq 0 \text{ となることがある}$$

$\Leftrightarrow$ 関数 $f(a)$ ($-1 \leq a \leq 2$) の最小値が 0 以下

から、

$$p+1 < -1 \text{ のとき、 } f(-1) \leq 0$$

$$-1 \leq p+1 \leq 2 \text{ のとき、 } f(p+1) \leq 0$$

$$2 < p+1 \text{ のとき、 } f(2) \leq 0$$

を解いて、

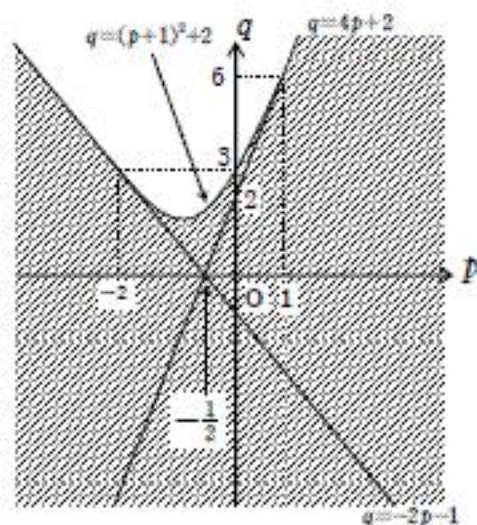
$$p < -2 \text{ のとき、 } q \leq -2p - 1$$

$$-2 \leq p \leq 1 \text{ のとき、 } q \leq (p+1)^2 + 2$$

$$1 < p \text{ のとき、 } q \leq 4p + 2$$

よって条件を満たす点 (p, q) の存在領域は、

図の斜線部分(境界を含む)



2

(1) 中心が $P(X, Y)$ で、点 $(0, 1)$ (点 Q とする) を通る円の方程式は、

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = X^2 + (1 - Y)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

で与えられる。①は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ と接するから、

$$(a - X)^2 + (-a - Y)^2 = X^2 + (1 - Y)^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{かつ} \quad \frac{Y + a}{X - a} = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。③から、

$$Y = X - 2a \quad \cdots \textcircled{3}'$$

これを②へ代入して、

$$(a - X)^2 + (-a - X + 2a)^2 = X^2 + (1 - X + 2a)^2$$

$$\Leftrightarrow X = a^2 + 2a + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{4} \quad \cdots \text{答}$$

③' から、

$$Y = a^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{5} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 点 $P(X, Y)$ から直線 $y = -x$ へ垂線 PH を下ろすと、任意の a に対して

$$PH = PQ$$

が成立するから、点 P は点 Q を焦点、 $y = -x$ を準線とした放物線を描く。

③'、⑤からパラメータ a を消去すると、

$$Y = \left(\frac{X - Y}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 2XY - 4Y + 2 = 0$$

$Y = 1$ とすると、⑤から $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、

$$X^2 - 2X - 1 = 0$$

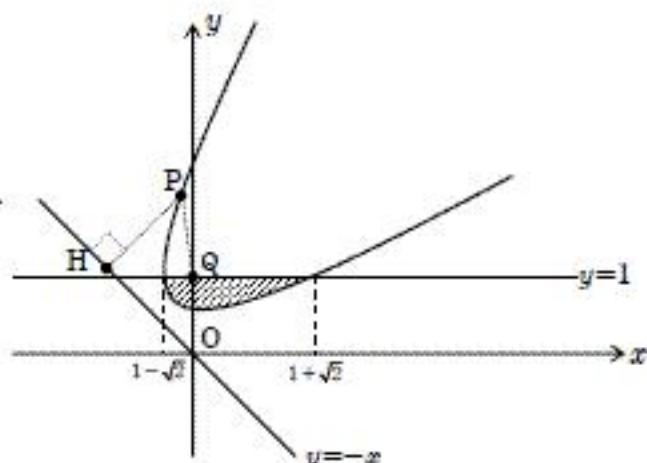
$$\Leftrightarrow X = 1 \pm \sqrt{2}$$

以上から求める面積は、

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (1 - y) dx$$

であり、 $\frac{dx}{da} = 2a + 2$,

x	$1 - \sqrt{2} \rightarrow 1 + \sqrt{2}$
a	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$



から、

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - a^2 - \frac{1}{2} \right) (2a + 2) da$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^3 - 2a^2 + a + 1) da$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^2 + 1) da$$

$$= 2 \left[-\frac{2}{3} a^3 + a \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots \text{答}$$

(1) 先生を T で表す。T がサイコロを 2 回とも 1 の目を出し、
かつ A が 2 回とも赤玉を取り出すときであるから、

$$\frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{540} \quad \cdots \text{答}$$

(2) B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率は、2 つの事象

D : 1 回目に B が赤玉を取り出す事象

E : 2 回目に B が赤玉を取り出す事象

を考えたとき、

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E)$$

であり、

$$P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(E) = 1 \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{7}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{10}$$

(1 回目に誰かが赤) (1 回目に誰かが白)

$$P(D \cap E) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

以上より求める確率は、

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \frac{26}{135} \quad \cdots \text{答}$$

(3) 1 回目、2 回目に何色の玉を取り出すかで場合わけすると、次の 4 通りが考えられる。

(i) ○ ○ ● (ii) ○ ● ● (○白玉 ●黒玉とした)

(iii) ● ○ ● (iv) ● ● ●

よって求める確率は、

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{7}{10} \cdot 1 \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{7}{10} \cdot 1 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{8} \\ & + 1 \cdot \frac{3}{10} \cdot 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{3}{10} \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{20} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

[4]

点 R は線分 AQ 上にあるから、

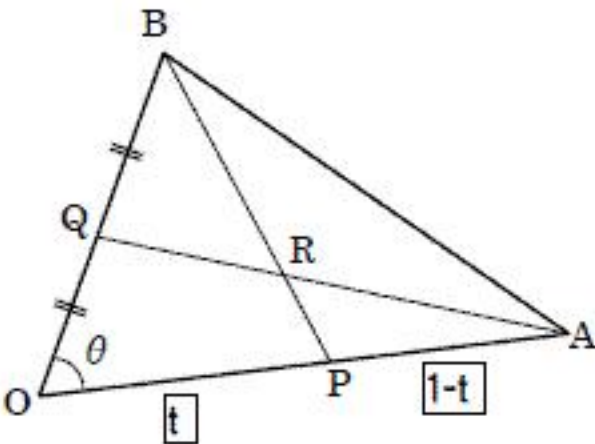
$$\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OQ} + s\overrightarrow{OA}$$

とかける。

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} = \frac{1}{t}\overrightarrow{OP}$$

だから、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1-s}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{s}{t}\overrightarrow{OP}$$



点 R は線分 BP 上にあるから、

$$\frac{1-s}{2} + \frac{s}{t} = 1$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{t}{2-t}$$

よって、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}}{2-t}$$

そこで、 $OR \perp AB$ であるとき、

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}\} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -t|\overrightarrow{OA}|^2 + (1-t)|\overrightarrow{OB}|^2 + (2t-1)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$|\overrightarrow{OA}| = 3, |\overrightarrow{OB}| = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 6\cos\theta$ であるから、

$$-9t + 4(1-t) + 6(2t-1)\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(2t-1)\cos\theta = 13t-4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

そこで、

任意の θ に対して OR と AB が垂直にならない

$$\Leftrightarrow 0 < \theta < \pi \text{ で } \textcircled{1} \text{ が成立しない}$$

であり、

$t = \frac{1}{2}$ のとき $\textcircled{1}$ は成立しない

$t \neq \frac{1}{2}$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{13t-4}{6(2t-1)}$$

であるから、求める条件は、

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \left| \frac{13t-4}{6(2t-1)} \right| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad (5t-2)(t+2) \geq 0 \quad (t \neq \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow t \leq -2 \quad \frac{2}{5} \leq t$$

$0 < t < 1$ とで、

$$\frac{2}{5} \leq t < 1 \quad \cdots \text{答}$$

5

(1) $z+1-\frac{a}{z}=0 \quad \cdots \textcircled{1}$ について

$\textcircled{1} \Leftrightarrow z^2+z-a=0, \quad z \neq 0$

$a=0$ のとき,

$$z^2+z=0$$

$$z(z+1)=0$$

$$z \neq 0 \text{ なので, } z=-1$$

$a \neq 0$ のとき,

$$z=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{a+\frac{1}{4}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

よって、

$$\begin{cases} a=0 \text{ のとき, } z=-1 \\ a \neq 0 \text{ のとき, } z=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{a+\frac{1}{4}} \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $\bar{z}+1-\frac{a}{z}=0 \quad \cdots \textcircled{3}$ について、

$\textcircled{3} \Leftrightarrow z\bar{z}+z-a=0, \quad z \neq 0$

ここで $z=x+yi$ (x, y は実数, $x^2+y^2 \neq 0$) とすると、

$$(x+yi)(x-yi)+x+yi-a=0, \quad x^2+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-a+yi=0, \quad x^2+y^2 \neq 0$$

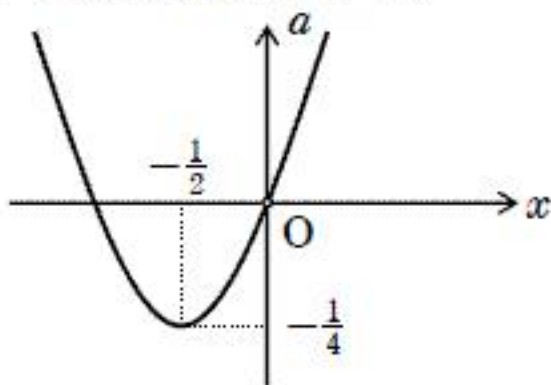
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x-a=0 \\ y=0 \end{cases}, \quad x^2+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=a \quad \cdots \textcircled{4}, \quad x \neq 0, \quad y=0$$

$\textcircled{4}$ を満たす実数 $x (\neq 0)$ が存在すればよいから、

右のグラフより、

$$a \geq -\frac{1}{4} \quad \cdots \text{答}$$



(3) $z(\bar{z})^2+\bar{z}-\frac{a}{z}=0 \quad \cdots \textcircled{5}$ について、

$\textcircled{5} \Leftrightarrow z^2(\bar{z})^2+z\bar{z}-a=0, \quad z \neq 0$

$$\Leftrightarrow (z\bar{z})^2+z\bar{z}-a=0, \quad z \neq 0$$

ここで $z\bar{z}=x^2+y^2=t$ とおくと $z \neq 0$ とで $t > 0$ であり、

$$t^2+t-a=0$$

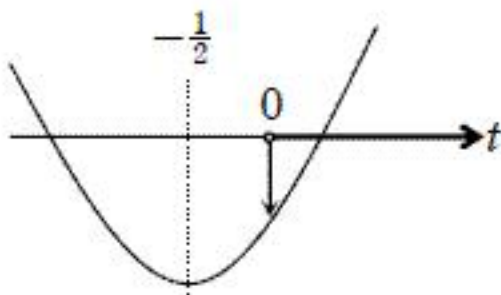
これが正の実数解 t を持つための条件を考えればよい。

左辺を $f(t)$ として、

$$f(0) < 0$$

$$\Leftrightarrow -a < 0$$

$$\Leftrightarrow a > 0 \quad \cdots \text{答}$$



[6]

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ について、 $A - E = N$ とおくと

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

であり、

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} A^n &= (N + E)^n \\ &= {}_n C_0 N^n + {}_n C_1 N^{n-1} E^1 + {}_n C_2 N^{n-2} E^2 + \dots \\ &\quad \dots + {}_n C_{n-2} N^2 E^{n-2} + {}_n C_{n-1} N^1 E^{n-1} + {}_n C_n E^n \\ &\quad \quad \quad (N \text{ と } E \text{ は可換}) \end{aligned}$$

$$= nN + E$$

$$= \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{aligned} \overline{OP_n} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} |\overline{P_n Q}|^2 &= (n+1-10)^2 + (2n+1-10)^2 \\ &= 5 \left(n - \frac{27}{5} \right)^2 + 162 - \frac{27^2}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{27}{5} - 5 = \frac{2}{5} < \frac{3}{5} = 6 - \frac{27}{5}$$

から点 P_n が点 Q に最も近くなるのは

$$n=5 \quad \dots \text{答}$$

