

①

$C: y = x^2$ について $y' = 2x$

よって曲線 C 上の点 (t, t^2) ($t \neq 0$) における曲線 C の法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

これで $t = \frac{1}{2}$, a とすることで、

$$l: y = -x + \frac{3}{4}$$

$$m: y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

これらの交点は、

$$\left(-a^2 - \frac{1}{2}a, a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\right)$$

であるから、これが曲線 C 上にあるための条件は、

$$a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4} = \left(-a^2 - \frac{1}{2}a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^4 + 4a^3 - 3a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(2a+3)(2a^2+a+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1, -\frac{3}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}i}{4}$$

a は $\frac{1}{2}$ でない正の実数だから、

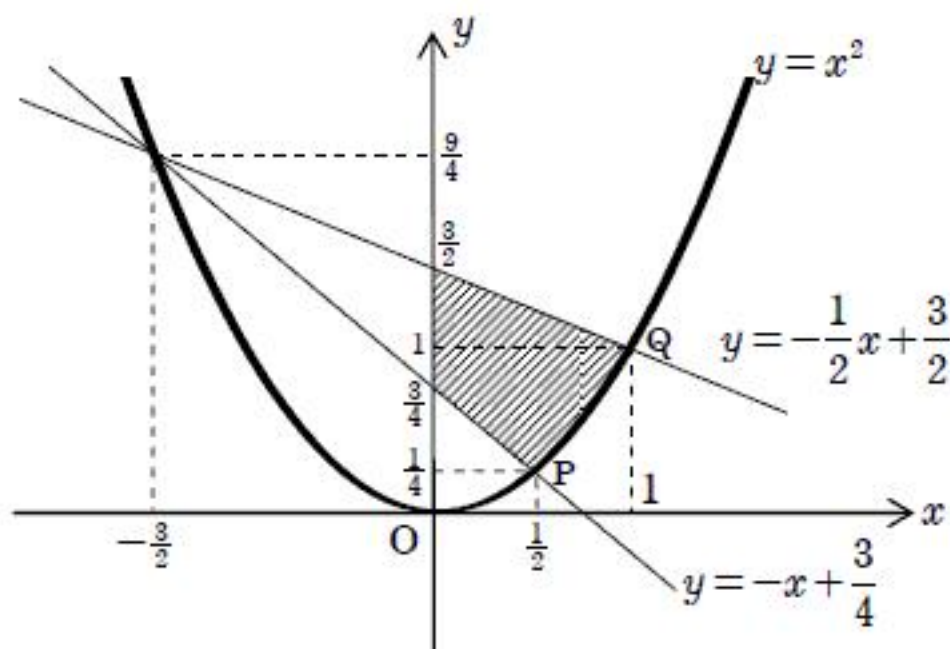
$$a = 1 \quad \dots(\text{答})$$

(2) 図の斜線部分の面積は、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \cdot 1$$

$$- \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \right\}$$

$$= \frac{17}{24} \quad \dots(\text{答})$$



[2]

(1) $t = -\sin x + \sqrt{3} \cos x$ について、

$$t^2 = \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1$$

よって、

$$f(x) = \left| \left(t^2 - 1 \right) + t - \frac{5}{4} \right|$$

$$= \left| t^2 + t - \frac{9}{4} \right| \quad \dots(\text{答})$$

(2) $t = 2 \sin(x + 120^\circ)$

であり、 $120^\circ \leq x + 120^\circ \leq 210^\circ$ から

$$-\frac{1}{2} \leq \sin(x + 120^\circ) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、

$$-1 \leq t \leq \sqrt{3} \quad \dots(\text{答})$$

(3) $f(x) = \left| \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{2} \right| = g(t)$ とおくと

$s = g(t)$ のグラフは右のようになる。よって、 $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$ で

$$0 \leq g(t) \leq \max \left\{ g\left(-\frac{1}{2}\right), g(\sqrt{3}) \right\}$$

であるが、

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) - g(\sqrt{3}) = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{4} + \sqrt{3} \right) = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{4} > 0$$

だから、

$$0 \leq f(x) \leq \frac{5}{2} \quad \dots(\text{答})$$

また、 $t = -\frac{1}{2}$ のとき、 $\sin(x + 120^\circ) = -\frac{1}{4}$ であり、

これを満たす x が $60^\circ < x < 75^\circ$ に存在することを示すには、

$$\sin 180^\circ > \sin(x + 120^\circ) > \sin 195^\circ$$

を示せばよい。

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$\sin 195^\circ = \sin(135^\circ + 60^\circ)$$

$$= \sin 135^\circ \cos 60^\circ + \cos 135^\circ \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

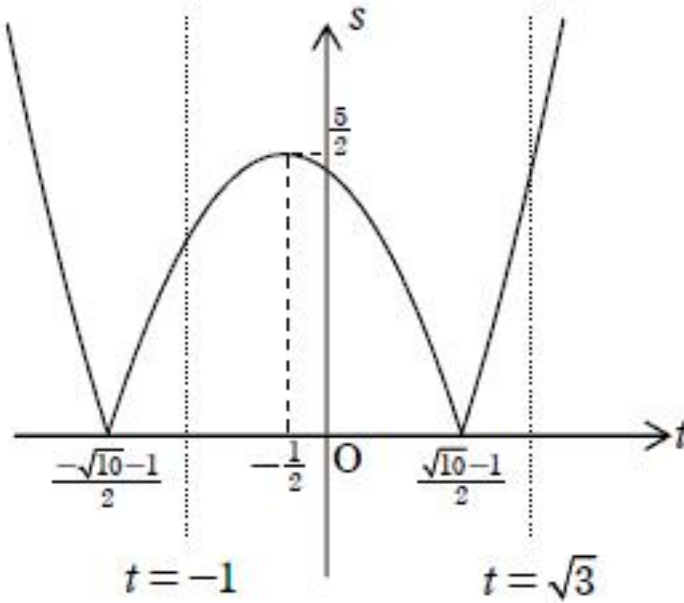
$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$0 > -\frac{1}{4} > \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

を示せばよいが、左側は成立している。右側は、

$$-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{8}}{4(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1)} > 0$$

なので成立している。以上より題意は示せた。 …証明終わり



③

(1) $X=4$ となるのは

A から a, b, c, d と取り出したとすると、(4!通り)、

B から a, b, c, d と取り出す場合である。(1通り)

以上より求める確率は、

$$\frac{4! \times 1}{4!4!} = \frac{1}{24} \quad \dots(\text{答})$$

$X=3$ となることはない。

$X=2$ となるのは

A から a, b, c, d と取り出したとすると、(4!通り)

B から a, b, d, c のように 2 回だけ数が一致する場合である(${}_4C_2$ 通り)。他の 2 回は数字が入れかわる場合(1通り)となるから、求める確率は、

$$\frac{4! \times {}_4C_2 \times 1}{4!4!} = \frac{1}{4} \quad \dots(\text{答})$$

$X=1$ となるのは、

A から a, b, c, d と取り出したとすると、(4!通り)

B から a, c, d, b のように 1 回だけ数が一致する場合である(${}_4C_1$ 通り)。他の 3 回は数字が全て一致しない場合(2通り)となるから、求める確率は、

$$\frac{4! \times {}_4C_1 \times 2}{4!4!} = \frac{1}{3} \quad \dots(\text{答})$$

以上より X の期待値は、

$$1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times 0 + 4 \times \frac{1}{24} = 1 \quad \dots(\text{答})$$

(2) 袋 A, B に 3 枚ずつカードが入っている場合(状態 P)、取り出したカードが一致する確率は、

$$\frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

袋 A, B に 2 枚ずつカードが入っている場合(状態 Q)、取り出したカードが一致する確率は、

$$\frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

袋 A, B に 1 枚ずつカードが入っている場合(状態 R)、取り出したカードが一致する確率は 1 である。

確率 p_n について、

これは状態 P で 1 回目～ $n-1$ 回目まで連続して異なるカードを取り出し、 n 回目に初めてカードの数が一致する確率なので、

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \dots(\text{答})$$

P	P		P	P
1	2	...	$n-1$	n
異	異		異	同

確率 q_n について、

これは 1 回目～ $n-2$ 回目までに 1 回だけ同じカードを取り出し、
 $n-1$ 回目に同じカードを取り出し、 n 回目に同じカードを取り出して終わる確率なので、
 $n \geq 3$ のとき、

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k} \right\} \times \frac{1}{2} \times 1$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1}{\frac{4}{3} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1 \right\}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

P	P		P	P	Q		Q	Q	R
1	2	...	$k-1$	k	$k+1$	...	$n-2$	$n-1$	n
異	異		異	同	異		異	同	同

また 2 回までの操作では全てのカードは取り除かれないので

$$\begin{cases} q_1 = q_2 = 0 \\ q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases} \quad \dots\text{答}$$

(下式は $n=2$ でも成立する)

(1) $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{cases} |p\vec{a} + q\vec{b}|^2 = 1 \\ \vec{a} \cdot (p\vec{a} + q\vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + q^2 - pq = 1 \\ p - \frac{1}{2}q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = \frac{1}{3} \\ q = 2p \end{cases}$$

$p > 0$ なので、

$$p = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad q = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \dots(\text{答})$$

(2) (1)で求めた $\vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{a} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{b}$ は $|\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ を満すので、 $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は一次独立。

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2\sqrt{3}}{3}|\vec{b}|^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。そこで平面上の任意のベクトル $\vec{x}$ は $\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{c}$ と書けるので、このとき

$$|\vec{x}| = \sqrt{s^2 + t^2} \quad (\text{これは点}(0,0)\text{と}(s,t)\text{の距離とみることができる。})$$

であり、

$$\begin{cases} -1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1 \\ 1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq s|\vec{a}|^2 + t\vec{c} \cdot \vec{a} \leq 1 \\ 1 \leq s\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{b} \cdot \vec{c} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq s \leq 1 \\ 1 \leq -\frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t \leq 2 \end{cases}$$

これを満す点 (s, t) の存在領域は、図の斜線部分 (境界を含む) となる。

点 $(0,0)$ と直線 $s - \sqrt{3}t + 2 = 0$ の距離は、

$$\frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}} = 1$$

点 $(0,0)$ と点 $\left(1, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ の距離は、

$$\sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

となる。以上より、

$$1 \leq |\vec{x}| \leq \frac{2\sqrt{21}}{3} \quad \dots(\text{答})$$

