

①

$$(1) \begin{cases} x = s + t + 1 \\ y = s - t - 1 \end{cases}$$

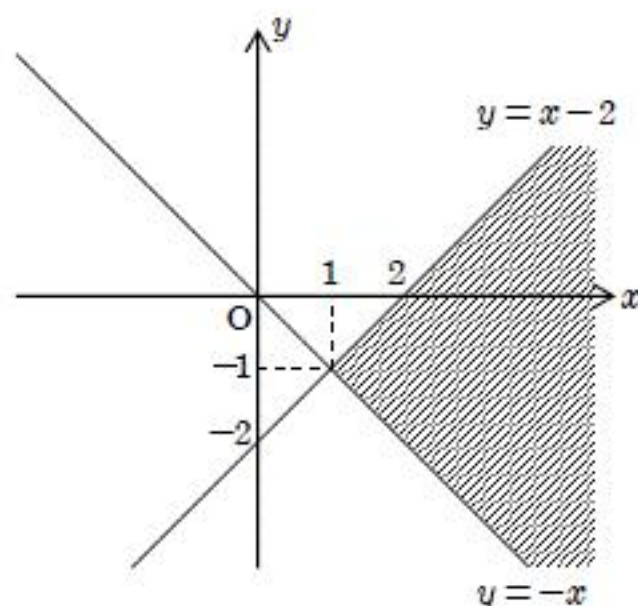
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{x+y}{2} \\ t = \frac{x-y-2}{2} \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

より①を満たす非負の実数 s, t の存在条件は,

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \geq 0 \\ \frac{x-y-2}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x-2 \end{cases}$$

以上より点 (x, y) の動く範囲は,

図の斜線部分(境界を含む)



$$(2) \begin{cases} x = st + s - t + 1 \\ y = s + t - 1 \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (t+1)s - t + 1 \\ s = y - (t-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (t+1)\{y - (t-1)\} - t + 1 \\ s = y - (t-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - (y-1)t + x - y - 2 = 0 & \dots \textcircled{2} \\ s = y - (t-1) & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

より,

①を満たす実数 s, t が存在

$\Leftrightarrow$ ②を満たす実数 t が存在(③より s も実数となる)

から②の判別式を D として,

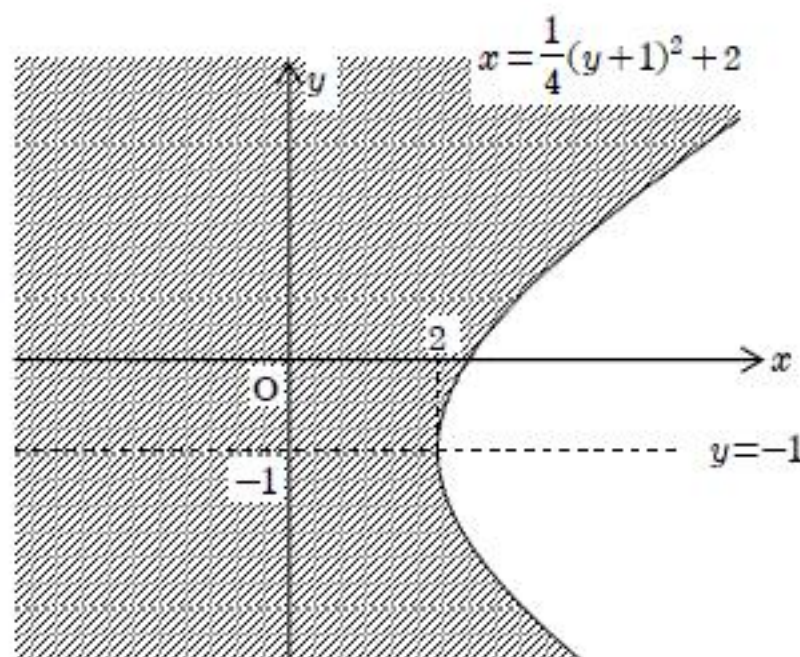
$$D = (y-1)^2 - 4(x-y-2) \geq 0$$

から,

$$x \leq \frac{1}{4}(y+1)^2 + 2$$

以上より点 (x, y) の動く範囲は,

図の斜線部分(境界を含む)



[2]

直線 $y = mx$ の方向ベクトルを $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ とし、この直線に

関して対称な 2 点 $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$ を考える。このとき、

$$\begin{cases} \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} = k\vec{r} \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{q} = 2k\vec{r} - \vec{p} & \dots \textcircled{1} \\ (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{r} = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

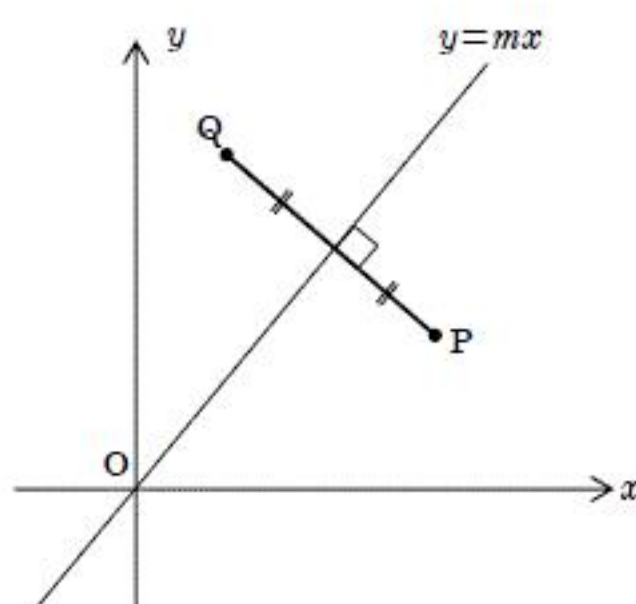
①, ②より $\vec{q}$ を消去して、

$$(2k\vec{r} - 2\vec{p}) \cdot \vec{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

よって①から、

$$\vec{q} = \frac{2\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \vec{r} - \vec{p}$$



そこで $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \frac{2(a+bm)}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \vec{p} \end{aligned}$$

よって 1 次変換 g を表す行列 A は、

$$A = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \quad \dots(\text{答})$$

(2) 1 次変換 f を表す行列は、 $m=1$ として、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

よって合成変換 $g \circ f$ を表す行列 B は、

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $m = \tan \frac{\theta}{2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{2m}{1+m^2} &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sin \theta \\ \frac{1-m^2}{1+m^2} &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cos \theta \end{aligned}$$

よって、

$$B = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) & -\sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) & \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix}$$

と書ける。これは原点を中心とし、角 $\theta - \frac{\pi}{2}$ の回転を与える行列である。

よって、

$$B^3 = \begin{pmatrix} \cos \left(3\theta - \frac{3}{2}\pi \right) & -\sin \left(3\theta - \frac{3}{2}\pi \right) \\ \sin \left(3\theta - \frac{3}{2}\pi \right) & \cos \left(3\theta - \frac{3}{2}\pi \right) \end{pmatrix}$$

を満たす。これが単位行列 E に等しいとき、

$$\cos \left(3\theta - \frac{3}{2}\pi \right) = 1, \quad \sin \left(3\theta - \frac{3}{2}\pi \right) = 0$$

から、

$$3\theta - \frac{3}{2}\pi = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{4n+3}{6}\pi$$

$n=0, 1, 2$ として、

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

よって、

$$m = \tan \frac{\pi}{4}, \tan \frac{7}{12}\pi, \tan \frac{11}{12}\pi$$

から、

$$\tan \frac{7}{12}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = -2 - \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{11}{12}\pi = \tan \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{2\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = -2 + \sqrt{3}$$

以上より、

$$m = 1, -2 \pm \sqrt{3} \quad \dots(\text{答})$$

[3]

(1) $X=4$ となるのは

Aから a, b, c, d と取り出したとすると、(4!通り)、

Bから a, b, c, d と取り出す場合である。(1通り)

以上より、求める確率は、

$$\frac{4! \times 1}{4!4!} = \frac{1}{24} \quad \dots(\text{答})$$

$X=3$ となることはないから、求める確率は、0 …(答)

$X=2$ となるのは

Aから a, b, c, d と取り出したとすると、(4!通り)

Bから a, b, d, c のように2回だけ数が一致する場合である(${}_4C_2$ 通り)。他の2回は

数字が入れかわる場合(1通り)となるから、求める確率は、

$$\frac{4! \times {}_4C_2 \times 1}{4!4!} = \frac{1}{4} \quad \dots(\text{答})$$

$X=1$ となるのは、

Aから a, b, c, d と取り出したとすると、(4!通り)

Bから a, c, d, b のように1回だけ数が一致する場合である(${}_4C_1$ 通り)。他の3回は

数字が全て一致しない場合(2通り)となるから、求める確率は、

$$\frac{4! \times {}_4C_1 \times 2}{4!4!} = \frac{1}{3} \quad \dots(\text{答})$$

以上より X の期待値は、

$$1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times 0 + 4 \times \frac{1}{24} = 1 \quad \dots(\text{答})$$

(2) 袋A、Bに3枚ずつカードが入っている場合(状態P)、取り出したカードが一致する確率は、

$$\frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

袋A、Bに2枚ずつカードが入っている場合(状態Q)、取り出したカードが一致する確率は、

$$\frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

袋A、Bに1枚ずつカードが入っている場合(状態R)、取り出したカードが一致する確率は1である。

確率 p_n について、

これは状態Pで1回目～ $n-1$ 回目まで連続して異なるカードを取り出し、 n 回目に

初めてカードの数が一致する確率なので、

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \dots(\text{答})$$

P		P		P		P	
1	2	...	$n-1$	n			
異	異		異	同			

確率 q_n について、

これは1回目～ $n-2$ 回目までに1回だけ同じカードを取り出し、

$n-1$ 回目に同じカードを取り出し、 n 回目に同じカードを取り出して終わる確率なので、

$n \geq 3$ のとき、

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k} \right\} \times \frac{1}{2} \times 1$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1}{\frac{4}{3} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1 \right\}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

また2回までの操作では全てのカードは取り除かれないので

$$\begin{cases} q_1 = q_2 = 0 \\ q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad (n \geq 3) \quad \dots \text{答} \end{cases}$$

(下式は $n=2$ でも成立する)

P		P		P		Q		Q		R	
1	2	...	$k-1$	k	$k+1$	...	$n-2$	$n-1$	n		
異	異		異	同	異		異	同	同		

④

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$0 \leq t \leq x \text{ で } t-x \leq 0, \quad x \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } t-x \geq 0$$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)} dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)} dt \\ &= [-\log\{1+\sin(x-t)\}]_0^x + [\log\{1+\sin(t-x)\}]_x^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\log(1+\sin 0) + \log(1+\sin x) \\ &\quad + \log\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} - \log(1+\sin 0) \\ &= \log(1+\sin x) + \log(1+\cos x) \\ &= \log(1+\sin x)(1+\cos x) \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ のとき,

$$0 \leq x \leq \pi \text{ で } t-x \leq 0$$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)} dt \\ &= [-\log\{1+\sin(x-t)\}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\log\left\{1+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\} + \log(1+\sin x) \\ &= -\log(1-\cos x) + \log(1+\sin x) \\ &= \log \frac{1+\sin x}{1-\cos x} \end{aligned}$$

ここで関数

$$g(x) = (1+\sin x)(1+\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$h(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

を考える。

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ を考えると, } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ で}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi \text{ より } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ なので } 1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

このとき,

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x \\ &= 1 + t + \frac{t^2 - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(t+1)^2 \end{aligned}$$

よって $g(x)$ は $t=1$ で最小値 2, $t=\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ をとる。

また $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ では $\cos x < 0$, $\sin x > 0$ であり,

$$h'(x) = \frac{\cos x - \sin x - 1}{(1 - \cos x)^2} < 0 \text{ だから, 関数 } h(x) \text{ は } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ で減少関数である。}$$

よって $h(x)$ は $x=\pi$ で最小値 $\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 2 をとる。

以上の結果と $\frac{1}{2} < 2$, $2 < \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, 対数関数 $y = \log x$ は単調増加であることとで,

$$\text{最大値は } \log \frac{3+2\sqrt{2}}{2}, \text{ 最小値は } \log \frac{1}{2} (= -\log 2) \quad \cdots (\text{答})$$

5

(1) $\angle APB = 90^\circ$ であるから、 $\angle BPQ = 60^\circ$ のとき $\angle APQ = 30^\circ$ であり、

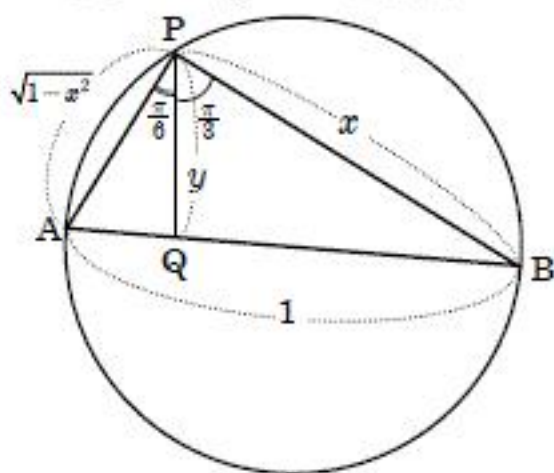
$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

よって、面積の関係から、

$$\triangle PAQ + \triangle PBQ = \triangle PAB$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot y \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot x \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}x + \sqrt{1-x^2}} \quad \dots(\text{答})$$



(2) $0 < x < 1$ だから $x = \cos \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とおける。このとき、

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{3} \cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} \end{aligned}$$

となり、これを $f(\theta)$ とおくと、

$$f'(\theta) = \frac{2 \cos^3 \theta (\sqrt{3} - \tan^3 \theta)}{(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)^2}$$

よって $\tan^3 \theta = \sqrt{3}$ を満たす θ を $\theta = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

とすると関数 $f(\theta)$ の増減は右のようになるから、 $f(\theta)$ は $\theta = \alpha$ で最大となり、このとき、

$$x = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt[3]{3}}} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

θ	(0)	...	α	...	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗		↘	

[6]

$$(1) \quad a_n > 1 \quad (n=2,3,4,\dots) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立することを数学的帰納法で示す。

(i) $n=2$ のとき,

$$a_2 = \sqrt{\frac{3a_1+4}{2a_1+3}} = \sqrt{\frac{7}{5}} > 1$$

より①は $n=2$ で成立する。

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$) のとき,

$$a_k > 1$$

と仮定する。このとき,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 1 &= \sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}} - 1 \\ &= \frac{a_k+1}{\sqrt{2a_k+3}(\sqrt{3a_k+4}+\sqrt{2a_k+3})} > 0 \end{aligned}$$

より①は $n=k+1$ でも成立する。

以上より,

$$a_n > 1 \quad (n=2,3,4,\dots) \quad \cdots \text{証明終わり}$$

$$(2) \quad \alpha^2 = \frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+1)(2\alpha^2 + \alpha - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

α は正の実数だから,

$$\alpha = \frac{\sqrt{33}-1}{4} \quad \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad a_n < \alpha \quad (n=1,2,3,\dots) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立することを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき,

$$\alpha - a_1 = \frac{\sqrt{33}-1}{4} - 1 = \frac{\sqrt{33}-\sqrt{25}}{4} > 0$$

より②は $n=1$ で成立する。

(ii) $n=k$ ($k \geq 1$) のとき,

$$a_k < \alpha$$

と仮定する。このとき,

$$\begin{aligned} \alpha^2 - a_{k+1}^2 &= \frac{3\alpha+4}{2\alpha+3} - \frac{3a_k+4}{2a_k+3} \\ &= \frac{\alpha - a_k}{(2\alpha+3)(2a_k+3)} > 0 \quad \cdots \textcircled{3} \quad (1 < a_k, 0 < \alpha \text{ より}) \end{aligned}$$

であり, $\alpha > 0$, $a_{k+1} > 0$ だから,

$$a_{k+1} < \alpha$$

つまり②は $n=k+1$ でも成立する。

以上より,

$$a_n < \alpha \quad (n=1,2,3,\dots) \quad \cdots \text{証明終わり}$$

(4) ③と同様の計算から,

$$\alpha^2 - a_{n+1}^2 = \frac{\alpha - a_n}{(2\alpha+3)(2a_n+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} = \frac{1}{(\alpha + a_{n+1})(2\alpha+3)(2a_n+3)}$$

ここで $\alpha > a_n \geq 1$ ($n \geq 1$) だから,

$$\begin{aligned} &(\alpha + a_{n+1})(2\alpha+3)(2a_n+3) \\ &> (1+1)(2 \cdot 1+3)(2 \cdot 1+3) = 50 \end{aligned}$$

$$0 < \frac{1}{(\alpha + a_{n+1})(2\alpha+3)(2a_n+3)} < \frac{1}{50}$$

を満たす。よって,

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq \frac{1}{50} \quad \cdots (\text{証明終わり})$$

より $\alpha - a_{n+1} \leq \frac{1}{50}(\alpha - a_n)$ を満たす。

さらにこれを繰り返し用いることで,

$$r = \frac{1}{50} \text{ として,}$$

$$0 < \alpha - a_n \leq r(\alpha - a_{n-1}) \leq \cdots \leq r^{n-1}(\alpha - a_1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1}(\alpha - a_1) = 0$$

から, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - a_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{33}-1}{4} \quad \cdots (\text{答})$$