$\boxed{1}$

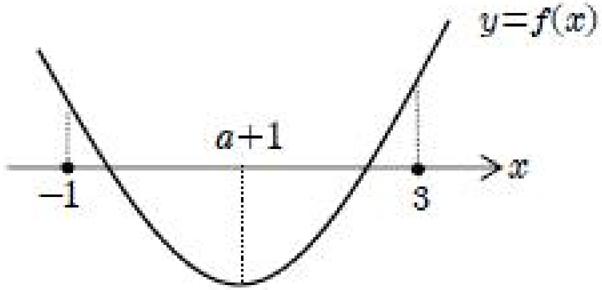
$$f(x)=x^2-2(a+1)x+3a$$

とおく。

（1）　$f(x)=\{x-(a+1)\}^2-a^2+a-1$

下に凸の放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲で共有点を２つ持つための条件を考えて，

$$\begin{cases} -1<a+1<3 \\ -a^2+a-1<0 \\ f(-1)=5a+3\geqq 0 \\ f(3)=3-3a\geqq 0 \end{cases} \iff \quad -\frac{3}{5}\leqq a\leqq 1 \quad \cdots 答$$

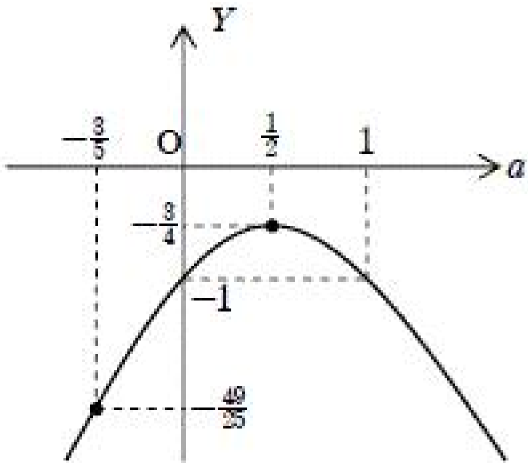


（2）　$Y=-a^2+a-1$

$$=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

より右のグラフから，

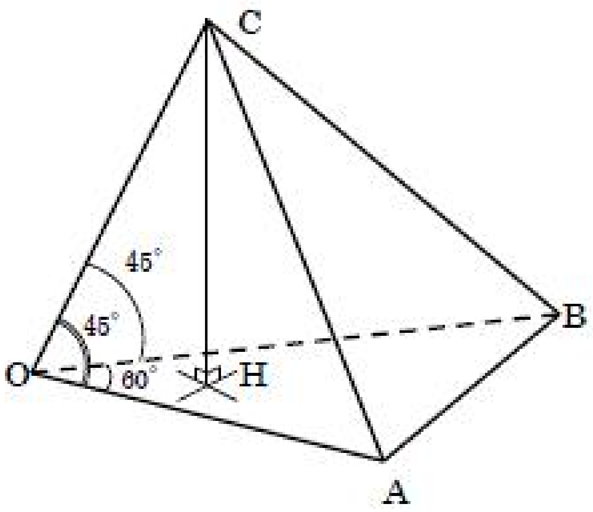
$$-\frac{49}{25}\leqq Y\leqq -\frac{3}{4} \quad \cdots 答$$



2

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$$



また条件から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

さらに CH⊥OAB から，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\left(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=0\\ \left(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x\left|\vec{a}\right|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}\\ x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\left|\vec{b}\right|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{1}{2}x+y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=y=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\quad\cdots答$$

（2） $$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2=\frac{2}{9}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$$

$$=\frac{2}{9}\left(\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$=\frac{2}{3}$$

よって，

$$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2}$$
$$=\sqrt{1-\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\cdots答$$

（3） 求める体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{1}{12}\quad\cdots答$$

3

（1） 1回目にAが5以下の目を出し，2回目にBが6の目を出したときだから，

$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$ …答

（2） 1回目にAが4以下の目を出し，2回目にBが5以下の目を出す。

さらに3回目にAが1回目との合計が5以下となる目を出し，4回目にBが2回目との合計が6となる目を出したときだから，1回目，2回目，3回目，4回目のサイコロの目をそれぞれa,b,c,dとしたとき，全て1以上6以下の自然数であり，

$1\leqq a\leqq 4$，$a+c\leqq 5$

$1\leqq b\leqq 5$，$b+d\geqq 6$

を満たすものを数える。すると，

$a=1$のとき，$c=1,2,3,4$

$a=2$のとき，$c=1,2,3$

$a=3$のとき，$c=1,2$

$a=4$のとき，$c=1$

$b=1$のとき，$d=5,6$

$b=2$のとき，$d=4,5,6$

$b=3$のとき，$d=3,4,5,6$

$b=4$のとき，$d=2,3,4,5,6$

$b=5$のとき，$d=1,2,3,4,5,6$

よって(a,c)の組は１０通りあり，また(b,d)の組は２０通りあるから，条件を満たす(a,b,c,d)の組み合わせは，

$10\cdot 20=200$ （通り）

以上より求める確率は，

$\frac{200}{6^4}=\frac{25}{162}$ …答

（3） AもBも2回のサイコロの目の和が5以下であればよいから，（2）のAと同じ計算により，

$\frac{10}{6^2}\times\frac{10}{6^2}=\frac{25}{324}$ …答

4

(1)

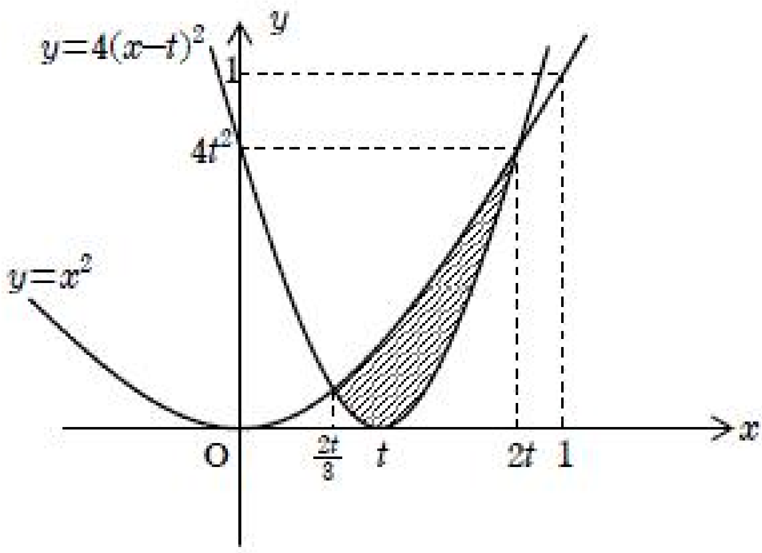
(i) $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき，

$$S(t)=\int_{\frac{2}{3}t}^{2t}\{x^2-4(x-t)^2\}dx$$

$$=-3\int_{\frac{2}{3}t}^{2t}(x-2t)\left(x-\frac{2}{3}t\right)dx$$

$$=-3\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2t-\frac{2}{3}t\right)^3$$

$$=\frac{32}{27}t^3$$



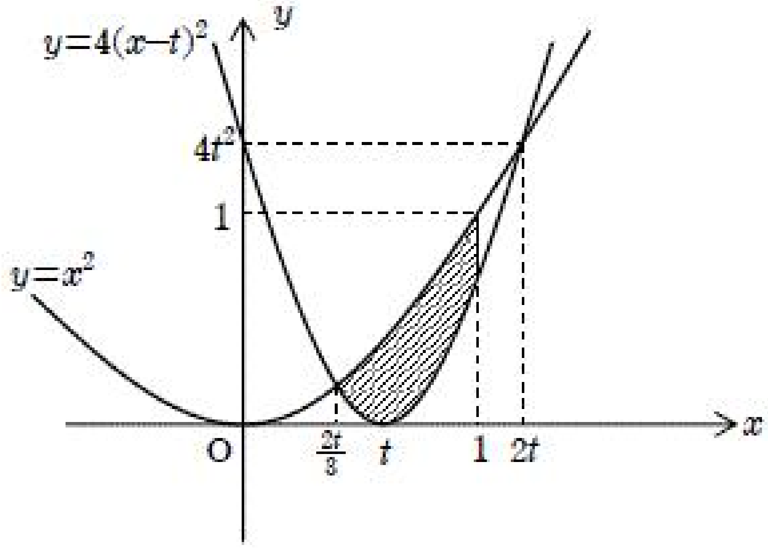
(ii) $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$S(t)=\int_{\frac{2}{3}t}^{1}\{x^2-4(x-t)^2\}dx$$

$$=\int_{\frac{2}{3}t}^{1}(-3x^2+8tx-4t^2)dx$$

$$=\left[-x^3+4tx^2-4t^2x\right]_{\frac{2}{3}t}^{1}$$

$$=\frac{32}{27}t^3-4t^2+4t-1$$



以上より，

$$S(t)=\begin{cases}\frac{32}{27}t^3 & \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\right)\\ \frac{32}{27}t^3-4t^2+4t-1 & \left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)\end{cases}$$ …答

(2) $S(t)$ は $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ では t の増加関数である。よって $S(t)$ の最大値は $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ で考えれば十分である。

$$S(t)=\frac{32}{27}t^3-4t^2+4t-1$$

について，

$$S'(t)=\frac{32}{9}t^2-8t+4$$

$$=\frac{4}{9}(4t-3)(2t-3)$$

より $S(t)$ の増減は右のようになる。よって，

$S(t)$ は $t=\frac{3}{4}$ で極大かつ最大となり，

最大値は，

$$S\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$$ …答

t	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{3}{4}$	…	1
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗		↘	