

①

$$f(x) = x^3 - kx^2 - 1$$

$$g(x) = (x - \alpha\beta)(x - \beta\gamma)(x - \gamma\alpha)$$

について,

(1) $f(x)=0$ の 3 つの解が α, β, γ のとき,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = k \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \\ \alpha\beta\gamma = 1 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。よって,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x^2 + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)x - (\alpha\beta\gamma)^2 \\ &= x^3 + kx - 1 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) 対称性より共通解(の一つ)を $x = \alpha$ としてよい。このとき,

$$\alpha^3 - k\alpha^2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha^3 + k\alpha - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たし, $\alpha \neq 0$ である。②-③より,

$$-k\alpha(\alpha + 1) = 0$$

となる。

(i) $k=0$ のとき,

$$f(x) = g(x) = x^3 - 1$$

となり, 確かに $f(x)=0$ と $g(x)=0$ は共通解を持つ。(1 の三乗根)

(ii) $k \neq 0$ のとき, $\alpha \neq 0$ から $\alpha = -1$ であり,

②, ③は共に

$$-1 - k - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

このとき $f(x)=0$ と $g(x)=0$ は共通解 $x = -1$ を持つ。

以上より, $k = 0, -2 \quad \cdots \text{答}$

[2]

(1) $\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} \\ &= x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

また条件から,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

さらに $CH \perp OAB$ から,

$$\begin{cases} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0 \\ (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

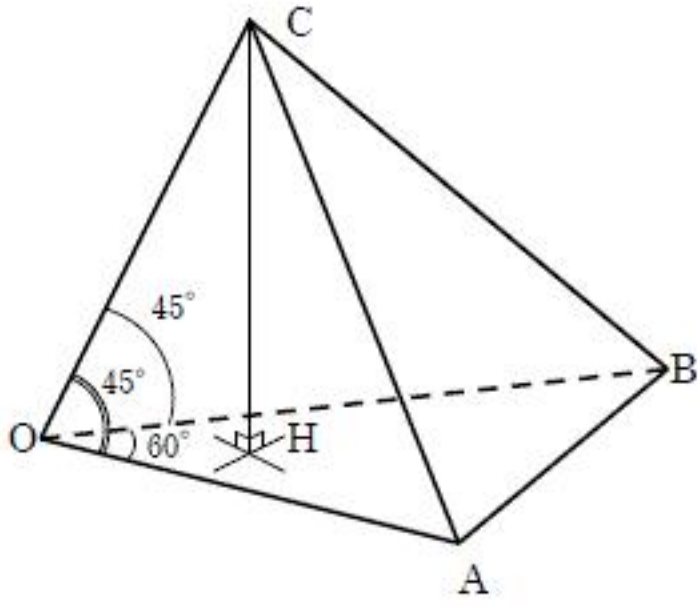
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} \\ x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

よって,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots \text{答}$$



$$\begin{aligned}(2) \quad |\overrightarrow{OH}|^2 &= \frac{2}{9}|\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= \frac{2}{9}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}CH &= \sqrt{OC^2 - OH^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \text{答}\end{aligned}$$

(3) 求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot CH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{1}{12} \quad \dots \text{答}\end{aligned}$$

③

- (1) 1回目にAが5以下の目を出し、2回目にBが5以下の目を出す。さらに3回目にAが1回目との合計が6以上となる目を出したときだから、1回目、2回目、3回目のサイコロの目をそれぞれ a, b, c としたとき、全て1以上6以下の自然数であり、

$$1 \leq a \leq 5, a+c \geq 6, 1 \leq b \leq 5$$

を満たすものを数える。すると、

$$a=1 \text{ のとき, } c=5, 6$$

$$a=2 \text{ のとき, } c=4, 5, 6$$

$$a=3 \text{ のとき, } c=3, 4, 5, 6$$

$$a=4 \text{ のとき, } c=2, 3, 4, 5, 6$$

$$a=5 \text{ のとき, } c=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

よって (a, c) の組は20通りあるから、条件を満たす (a, b, c) の組み合わせは、

$$20 \cdot 5 = 100 \text{ (通り)}$$

以上より求める確率は、

$$\frac{100}{6^3} = \frac{25}{54} \quad \cdots \text{答}$$

- (2) 1回目にAが4以下の目を出し、2回目にBが5以下の目を出す。

さらに3回目にAが1回目との合計が5以下となる目を出し、4回目にBが2回目との合計が6以上となる目を出したときだから、1回目、2回目、3回目、4回目のサイコロの目をそれぞれ a, b, c, d としたとき、全て1以上6以下の自然数であり、

$$1 \leq a \leq 4, a+c \leq 5 \quad \cdots \text{①}$$

$$1 \leq b \leq 5, b+d \geq 6 \quad \cdots \text{②}$$

を満たすものを数える。すると、①について、

$$a=1 \text{ のとき, } c=1, 2, 3, 4$$

$$a=2 \text{ のとき, } c=1, 2, 3$$

$$a=3 \text{ のとき, } c=1, 2$$

$$a=4 \text{ のとき, } c=1$$

よって (a, c) の組は10通りあり、また②について、 (b, d) の組は(1)の (a, c) の組と同様に20通りあるから、条件を満たす (a, b, c, d) の組み合わせは、

$$10 \cdot 20 = 200 \text{ (通り)}$$

以上より求める確率は、

$$\frac{200}{6^4} = \frac{25}{162} \quad \cdots \text{答}$$

- (3) 1回目、2回目、3回目、4回目、5回目、6回目のサイコロの目をそれぞれ a, b, c, d, e, f としたとき、全て1以上6以下の自然数であり、

$$a+c+e \leq 5 \quad \cdots \text{③}$$

$$b+d+f \leq 5 \quad \cdots \text{④}$$

を満たすものを数える。すると、③について、 $1 \leq a \leq c \leq e$ とすると、

$$(a, c, e) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2)$$

の4パターンが考えられる。あとは大小関係をキャンセルすることで、③を満たす (a, c, e) の組は、

$$1+3+3+3=10 \text{ (通り)}$$

ある。④についても同様に数えられるから、求める確率は、

$$\frac{10 \cdot 10}{6^6} = \frac{25}{11664} \quad \cdots \text{答}$$

4

$$\begin{aligned} (1) \quad b_n &= \left[\frac{1}{n} e^{n \sin \theta} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{n} e^{n \sin \frac{\pi}{6}} - \frac{1}{n} e^{n \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)} \\ &= \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{2}n} - e^{-\frac{1}{2}n} \right) \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a_n - b_n &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(e^{n \sin \theta} - e^{n \sin \theta} \cos \theta \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} (1 - \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ で $e^{n \sin \theta} (1 - \cos \theta) \geq 0$ だから、
 $a_n - b_n \geq 0$

また、

$$\begin{aligned} 2b_n - \sqrt{3}a_n &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(2e^{n \sin \theta} \cos \theta - \sqrt{3}e^{n \sin \theta} \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} (2 \cos \theta - \sqrt{3}) d\theta \end{aligned}$$

ここで $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ で $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ だから $2 \cos \theta - \sqrt{3} \geq 0$
 よって $e^{n \sin \theta} (2 \cos \theta - \sqrt{3}) \geq 0$ だから、
 $2b_n - \sqrt{3}a_n \geq 0$

以上より、 $b_n \leq a_n \leq \frac{2}{\sqrt{3}}b_n \quad \dots \text{答}$

(3) (2)の結果より、任意の自然数 n に対して、

$$\frac{1}{n} \log (nb_n) \leq \frac{1}{n} \log (na_n) \leq \frac{1}{n} \log \left(\frac{2}{\sqrt{3}}nb_n \right)$$

が成立する。そこで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log (nb_n) &= \frac{1}{n} \log \left(e^{\frac{1}{2}n} - e^{-\frac{1}{2}n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \log \left\{ e^{\frac{1}{2}n} (1 - e^{-n}) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \log e^{\frac{1}{2}n} + \log (1 - e^{-n}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\log (1 - e^{-n})}{n} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (nb_n) &= \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{2}{\sqrt{3}}nb_n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n} \log (nb_n) \right\} \\ &= 0 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よりはさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (na_n) = \frac{1}{2} \quad \dots \text{答}$$

[5]

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{4}\pi & -\sin \frac{3}{4}\pi \\ \sin \frac{3}{4}\pi & \cos \frac{3}{4}\pi \end{pmatrix}$ であり、これは原点を中心とする角 $\frac{3}{4}\pi$ の回転を与える回転行列である。

よって、

$$\begin{aligned} A^4 &= \begin{pmatrix} \cos 3\pi & -\sin 3\pi \\ \sin 3\pi & \cos 3\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{①}$

①が $n \geq 0$ で成立することを数学的帰納法により証明する。

(i) $n = 0$ のとき、

$$(E - A^1)(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり、これは $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ に一致するから、①は $n = 0$ で成立する。

(ii) $n = k (k \geq 0)$ のとき、①、つまり、

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = (E - A^{k+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立すると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= A \left\{ (E - A^{k+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \{ A(E - A^{k+1})(E - A)^{-1} + E \} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \{ A(E - A^{k+1})(E - A)^{-1} + (E - A)(E - A)^{-1} \} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \{ A(E - A^{k+1}) + E - A \} (E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (A - A^{k+2} + E - A)(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (E - A^{k+2})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって①は $n = k + 1$ でも成立する。以上より①は $n \geq 0$ で成立する。 $\cdots$ 証明終わり

(3) (1)の結果より、

$$A^8 = E$$

を満たす。よって①により、

$$\begin{pmatrix} x_{n+8} \\ y_{n+8} \end{pmatrix} = (E - A^{n+9})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

が成立するから、 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} (n = 0, 1, 2, \dots)$ のとり得る値は高々 8 個であり、周期 8

で 8 つの点をくり返す。以下、 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ のときの OP_n^2 の値を調べる。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_n + y_n) + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_n - y_n) \end{pmatrix}$$

を利用して、

$n = 0$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $OP_0^2 = 1$

$n = 1$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ より $OP_1^2 = 2 - \sqrt{2}$

$n = 2$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 \end{pmatrix}$ より $OP_2^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

$n = 3$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ より $OP_3^2 = 4 - 2\sqrt{2}$

$n = 4$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}-1)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ より $OP_4^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

$n = 5$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(0+\sqrt{2}-1)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0-\sqrt{2}+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 \end{pmatrix}$ より $OP_5^2 = 2 - \sqrt{2}$

$n = 6$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$ より $OP_6^2 = 1$

$n = 7$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $OP_7^2 = 0$

$$0 < 3 - 2\sqrt{2} < 2 - \sqrt{2} < 4 - 2\sqrt{2}$$

であることから、距離 OP_3 が最大である。距離 OP_n は $n = 0, 1, 2, \dots$ のとき、

$$1, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, 1, 0$$

の 8 つの値をくり返すので、以上より求める n の値は、

$$n = 8m + 3 (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad \cdots \text{答}$$

⑥

xyz 空間で次の不等式の満たす領域を考える。

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

すると、これは問いの条件を満たす円柱となる。

また、 $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ とすると、線分 AB を含み底面と 45° の角度をなす平面は、

$$z = x$$

で表されるので、題意の V は、

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z \leq x \quad \cdots \textcircled{1}$$

で表せる。

(1) ①で $y = t$ とすると、

$$x^2 \leq 1 - t^2, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z \leq x$$

となり、これを xz 平面で図示したものが問いの

断面である。(右図)

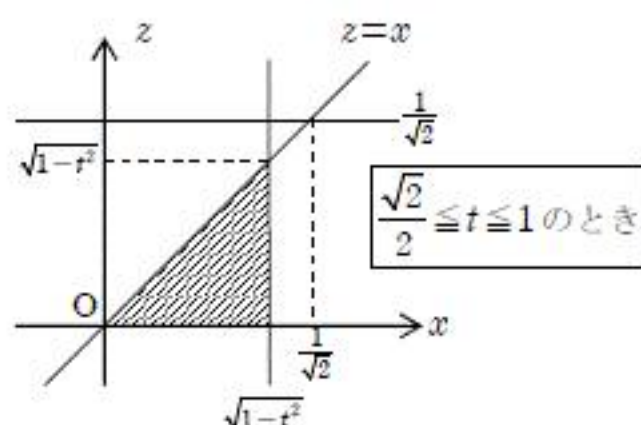
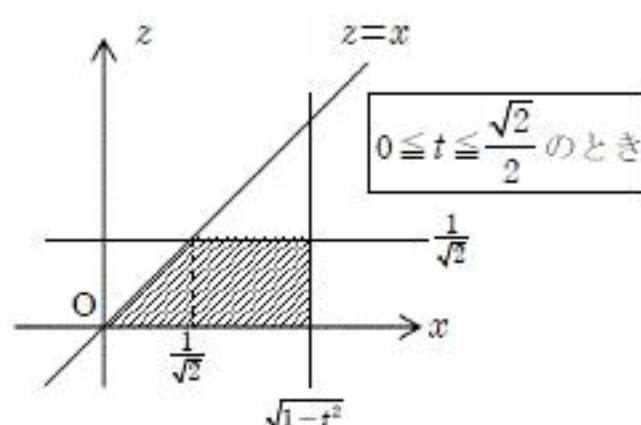
よって、

$$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{1-t^2} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{4} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1 \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-t^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (1-t^2) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$



(2) 求める体積は、図形の対称性(この設定では xz 平面に関する対称性)より、

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 S(t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{4} \right) dt + 2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{2} (1-t^2) dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dt + \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\ &= \sqrt{2} \left\{ \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

※ ——— は次の図の斜線部分の面積で計算できる。

