

①

(1) $y = x^2$ について、 $y' = 2x$ である。よって、 $y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における接線 l_1 の方程式は、

$$y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様にして接線 l_2 の方程式は $y = 2bx - b^2 \quad \cdots \textcircled{2}$

①、②より y を消去すると、

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

これを①へ代入して、

$$y = 2a \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 = ab$$

以上より l_1, l_2 の交点 R の座標は、

$$R\left(\frac{a+b}{2}, ab\right) \quad \cdots \text{答}$$

(2) 右下図のようになるから、求める面積は、

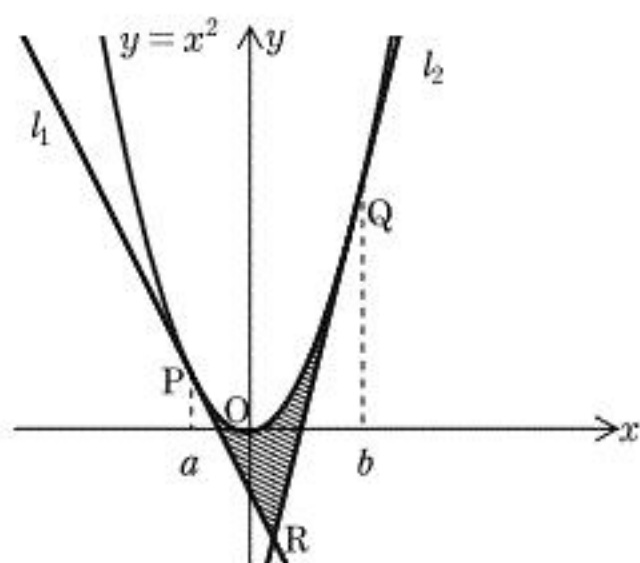
$$S = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \{x^2 - (2bx - b^2)\} dx$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-b)^3 \right]_{\frac{a+b}{2}}^b$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^3 \quad \cdots \text{答}$$



(3) $l_1 \perp l_2$ のとき、

$$2a \cdot 2b = -1$$

より、

$$a = -\frac{1}{4b}$$

が成立する。 a, b は異符号であり、 $a < b$ なので $a < 0, 0 < b$ だから、

$$b - a = b + \frac{1}{4b}$$

$$\geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{4b}}$$

$$= 1$$

が成立し、等号は $b = \frac{1}{2}$ のときのみ成立する。このとき $a = -\frac{1}{2}$ であり、

$$S \geq \frac{1}{12} \cdot 1^3$$

$$= \frac{1}{12} \quad (\text{等号は } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \text{ のときのみ成立})$$

が成立するから S の最小値は $\frac{1}{12}$ $\cdots$ 答

②

10 個の玉全てに区別を付けて数える。

(1) 異なる 10 個の玉から 2 個の玉を取り出す方法は、

$${}_{10}C_2 = 45 \quad (\text{通り})$$

この中で、2 つの数字の積が 10 となるのは、2 数が 2 と 5 の場合であり、

$$2 \cdot 2 = 4 \quad (\text{通り})$$

以上より求める確率は、

$$\frac{4}{45} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 異なる 10 個の玉から 4 個の玉を取り出す方法は、

$${}_{10}C_4 = 210 \quad (\text{通り})$$

この中で、2 つの数字の積が 100 となるのは、 $100 = 2^2 \cdot 5^2$ の形から、

4 数が 2, 2, 5, 5 または 1, 4, 5, 5 の場合である。

それぞれ取り出し方は、1 通り、4 通りだから、求める確率は、

$$\frac{1+4}{210} = \frac{1}{42} \quad \cdots \text{答}$$

(3) 異なる 10 個の玉から 6 個の玉を順番に取り出す方法は、

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad (\text{通り})$$

この中で、条件を満たすものは、

残った 4 数の積が平方数である

ことが必要であり、次の 2 パターンが考えられる。

(i) 残った 4 数が m, m, n, n の形 (m, n は異なる自然数)

(ii) 残った 4 数が m, m, n, l の形 (m, n, l は全て異なる自然数で、 nl が平方数)

(i) のとき、 m, n の選び方は ${}_5C_2 = 10$ (通り) あり、それぞれについて取り出した数を

a, a, b, b, c, c (a, b, c は全て異なる自然数) としたとき、これらを 3 つの数と 3 つの数の 2 組に分けてその積が等しくなるようなわけ方は、

1 個目から 3 個目が a と b と c

4 個目から 6 個目が a と b と c

となるものだから、順番も考慮することで、

$$(3! \times 2 \times 2 \times 2) \times (3! \times 1 \times 1 \times 1) = 288 \quad (\text{通り})$$

以上より、

$$10 \times 288 = 2880 \quad (\text{通り})$$

(ii) のとき、

nl が平方数となるような n, l の組は、1 と 4 の組み合わせのみ。

よって、 m の選び方は 1 と 4 を除いた 3 通りで、

(ア) 2, 2, 1, 4

(イ) 3, 3, 1, 4

(ウ) 5, 5, 1, 4

の 3 通りのみ考えられる。それぞれについて取り出した 6 個の数は、

(ア) 1, 4, 3, 3, 5, 5 (6 数の積は 30^2)

(イ) 1, 4, 2, 2, 5, 5 (6 数の積は 20^2)

(ウ) 1, 4, 2, 2, 3, 3 (6 数の積は 12^2)

となる。これらを 3 つの数と 3 つの数の 2 組に分けてその積が等しくなるように分ける方法は、

(ア) の場合、3 数で 30 が作れないので不可能。

(イ) の場合、 $1 \times 4 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 = 20$ のみ。

(ウ) の場合、 $1 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 = 12$ のみ。

よって、

(イ) の場合は、

$$2 \times (3! \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1 \times 1) = 576 \quad (\text{通り})$$

(ウ) の場合も同様。

以上から求める確率は、

$$\frac{2880 + 576 \times 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2}{75} \quad \cdots \text{答}$$

③

(1) 点 P は線分 AN 上にあるから、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AN}$$

と表せる。よって、

$$\overrightarrow{OP} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{ON}$$

条件より、 $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OM}$ 、 $\overrightarrow{ON} = \frac{t}{t+1}\overrightarrow{OB}$ だから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}(1-k)\overrightarrow{OM} + \frac{kt}{t+1}\overrightarrow{OB} \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 P は線分 MB 上にあるから、

$$\frac{3}{2}(1-k) + \frac{kt}{t+1} = 1$$

が成立する。よって、

$$k = \frac{t+1}{t+3}$$

以上から、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \left(1 - \frac{t+1}{t+3}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{t+1}{t+3} \cdot \frac{t}{t+1}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{t+3}(2\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $\angle MOP = \angle BOP = \theta$ とする。また、 $OA = 1$ 、 $OB = l$ として

考えても一般性を失わない。 $(l > 0)$

$OP \perp BM$ より、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

(1)の結果より、

$$(2\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4|\overrightarrow{OA}|^2 + (2t-6)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 3t|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = 1, \quad |\overrightarrow{OB}|^2 = l^2, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot l \cdot \cos 2\theta \text{ より、}$$

$$4 - 3tl^2 + 2(t-3)l \cos 2\theta = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

また、 $\triangle OMP \equiv \triangle OBP$ なので、点 P は線分 BM の中点であるから、①より、

$$\frac{3}{2}(1-k) = \frac{kt}{t+1} = \frac{1}{2}$$

が成立する。よって、

$$k = \frac{2}{3}, \quad t = 3 \quad \cdots \text{答}$$

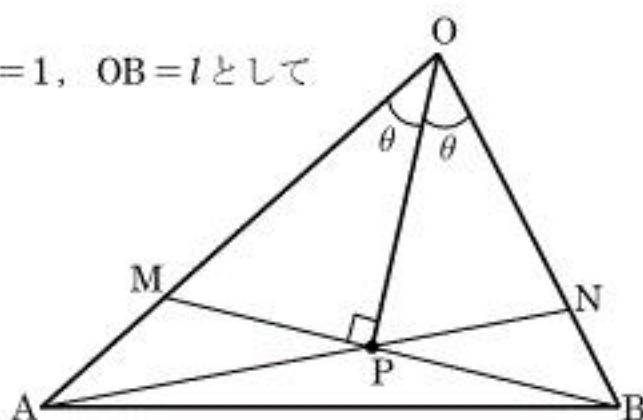
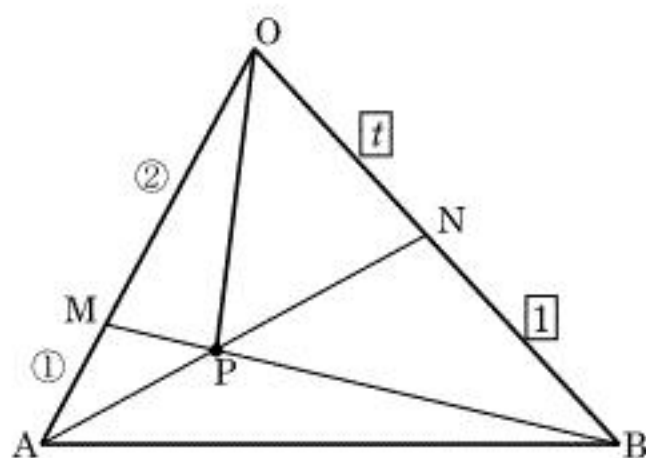
②へ代入すると、

$$4 - 9l^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{2}{3}$$

よって、

$$OA : OB = 1 : l = 3 : 2 \quad \cdots \text{答}$$



4

$$(1) \quad A^2 + B^2$$

$$= (2\sin x + \sin y)^2 + (2\cos x + \cos y)^2$$

$$= 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + 4(\sin x \sin y + \cos x \cos y) + \sin^2 y + \cos^2 y$$

$$= 5 + 4\cos(x - y)$$

より,

$$\cos(x - y) = \frac{A^2 + B^2 - 5}{4} \quad \dots \text{答}$$

$$(2) \quad A = 1 \text{ のとき,}$$

$$\cos(x - y) = \frac{B^2 - 4}{4} \leq 1$$

から,

$$B^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq B \leq 2\sqrt{2}$$

さて, $B^2 = 8$ のとき, $\cos(x - y) = 1$ であり, これは,

$$x - y = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

のときである。 $y = x - 2n\pi$ だから,

$$A = 2\sin x + \sin(x - 2n\pi) = 3\sin x$$

より $A = 1$ とで $\sin x = \frac{1}{3}$ となる。また,

$$B = 2\cos x + \cos(x - 2n\pi) = 3\cos x$$

より $B = \pm 2\sqrt{2}$ とで $\cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ となる。(複号同順)

以上より,

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3}, \quad \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ のとき, } B \text{ の最大値は } 2\sqrt{2} \\ \sin x = \frac{1}{3}, \quad \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ のとき, } B \text{ の最小値は } -2\sqrt{2} \end{cases} \quad \dots \text{答}$$